1933 № 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES



ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

И. П. Натансон. К вопросу о разложении функций по ортогональным полиномам. ИМЕН, 1933, № 1, стр. 85.

I. Natanson. Note sur le développement des fonctions suivant les polynômes orthogonaux. BAS-MN, 1933, № 1, p. 85 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Январь 1933 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор А. В. Суслов

Начато набором в ноябре 1932 г. — Подписано к печати 31 января 1933 г.

176 стр. (6 фиг.)

Формат бум. 72 × 110 см. — $11^2/_8$ печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2700

Ленгорлит № 330. — АНИ № 15. — Заказ № 47

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ПРИМЕНЕНИИ СПОСОБА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К НАХОЖДЕНИЮ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

А. Н. КРЫЛОВ

§ 1. В некоторых технических вопросах приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями вида

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = 0 \tag{1}$$

$$y'' + n^2 y + \beta F(y') = 0 \tag{1'}$$

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) + \gamma F(y') = 0 \tag{1''}$$

в которых n^2 заданна́я постоянная $f(y)$ и $F(y')$ заданные целые функции, большею частию целые полиномы небольшого числа членов, α и γ заданные постоянные, имеющие «малую» величину.

Начальные условия задаются обыкновенно в виде: при $t = 0$ должно быть

$$y(0) = a;\; y'(0) = 0 \tag{2}$$

В тех же случаях, когда начальные условия заданы в более общем виде:

$$y(0) = A;\; y'(0) = B \tag{2'}$$

то мы покажем (§ 12), что они всегда могут быть приведены к виду (2).

Пользуясь тем, что параметры α и β малые, решения этих уравнений представляют в виде рядов, расположенных по целым, положительным, возрастающим степеням этих параметров.

Другой тип уравнений, с которыми приходится иметь дело такой:

$$y'' + n^2 y + f(y) = 0 \tag{3}$$

$$y'' + n^2 y + F(y') = 0 \tag{3'}$$

$$y'' + n^2 y + f(y) + F(y') = 0 \tag{3''}$$

где по прежнему n^2 заданная постоянная, $f(y)$, $F(y')$ заданные целые функции своих аргументов, начальные условия

$$y(0)=\beta;\ y'(0)=0 \tag{2}$$

причем величина β, представляющая в механических вопросах амплитуду колебаний, «малая»; в этих случаях решение представляют в виде ряда, расположенного по целым, положительным, возрастающим степеням этой амплитуды β.

§ 2. Начнем наше рассмотрение с уравнений вида (1) как простейшего.

Итак положим, что дано уравнение

$$y''+n^2y+\alpha f(y)=0 \tag{1}$$

и начальное условие: при $t=0$ должно быть

$$y(0)=a;\ y'(0)=0 \tag{2}$$

требуется разложить решение этого уравнения в ряд по степеням малого параметра α, ограничиваясь в этом разложении членами, степень коих относительно α не выше k.

Обычная метода состоит в применении для такого разложения одного из следующих двух способов, приводящих к одинаковым результатам и в сущности к одинаковым выкладкам.

Первый способ состоит в том, что за исходное приближение берут величину

$$y=y_0 \tag{4}$$

определяя y_0 уравнением

$$y_0''+n^2y_0=0 \tag{5}$$

и начальными условиями

$$y_0(0)=a;\ y_0'=0 \tag{6}$$

так что будет

$$y_0=a\cos nt \tag{7}$$

Чтобы получить первое приближение полагают

$$y=y_1 \tag{8}$$

определяя y_1 уравнением

$$y_1''+n^2y_1=-\alpha f(y_0) \tag{9}$$

и условиями

$$y_1(0) = a;\ y_1'(0) = 0 \tag{10}$$

Определив y_1, находят второе приближение по уравнению

$$y_2'' + n^2 y_2 = -\alpha f(y_1) \tag{11}$$

и условиям

$$y_2(0) = a;\ y_2'(0) = 0 \tag{12}$$

и продолжают таким образом далее, пока дойдут до членов требуемого порядка относительно α.

Второй способ, примененный Пуассоном в его Механике и в исследованиях о качаниях маятника, такой: полагают

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^k\varphi_k \tag{13}$$

подставляют эту величину в уравнение (1) и в начальные условия (2); развивают левую часть полученного уравнения по степеням буквы α, ограничиваясь степенью k, то же делают и с начальными условиями, группируют члены с одинаковыми степенями α, тогда, уравнивая множитель при каждой из степеней α в отдельности нулю, получают систему уравнений такого вида

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0'' + n^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + n^2\varphi_1 = f_1(\varphi_0) \\ &\varphi_2'' + n^2\varphi_2 = f_1(\varphi_0, \varphi_1) \\ &\varphi_3'' + n^2\varphi_3 = f_2(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

и т. д.

причем $f_1, f_2, \ldots$ будут известными целыми функциями переменных под их знаками стоящих.

Начальные условия будут: при $t = 0$ должно быть

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(0) = a;\ \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0;\ \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0;\ \varphi_2'(0) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

и т. д.

Первое уравнение системы (14) и первое начальное условие (15) дают

$$\varphi_0 = a\cos nt \tag{16}$$

тогда второе уравнение будет

$$\varphi_1'' + n^2\varphi_1 = -f(a\cos nt) \tag{17}$$

правую часть этого уравнения развивают, заменяя степени косинуса через косинусы кратных аргументов по формулам:

Для m четного:

$$\cos^m u = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mu + m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)u + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\frac{1}{2}m}\right].$$

Для m нечетного:

$$\cos^m u = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mu + m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)u + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{1}{2}(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\frac{1}{2}(m-1)}\cos u\right]$$

Найдя после этого из уравнения (17) и соответствующего ему начального условия величину φ_1, переходят к третьему уравнению, в котором, развив правую часть, заменяют степени и произведения косинусов через косинусы кратных аргументов; из полученного таким образом уравнения и соответствующего начального условия находят φ_2 и продолжают таким образом, пока не определят величины φ_k, после чего найденные величины подставляют в уравнение

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^k\varphi_k$$

которое и представит требуемое разложение.

Из выражений для степеней косинуса видно, что в том случае, когда функция $f(y)$ четная, то во всех разложениях будут встречаться лишь четные степени косинуса, которые заменятся косинусами четных кратностей аргумента nt, и решение получится периодическое, но если функция $f(y)$

будет заключать и нечетные степени переменной y, то в правой части второго уравнений системы (14) будет заключаться член вида

$$g_0 \cos nt$$

где g_0 постоянная. Этому члену в выражении φ_1 будет соответствовать член

$$\frac{g_0}{n} t \sin nt$$

В правой части уравнения, которым определяется φ_2, появятся члены, содержащие время t вне знака синуса или косинуса, эти члены будут и во всех прочих уравнениях так, что в решении их будут члены вида:

$$(g_2 t^2 + g_1 t + g_0) \cos nt; \ (f_2 t^2 + f_1 t + f_0) \sin nt$$

и т. д.

При возрастании t эти члены, называемые в небесной механике **вековыми**, неопределенно возрастают, и найденным решением можно пользоваться лишь для весьма малых значений переменной t.

С этим затруднением встретились математики XVIII столетия, как только, изучая движение светил нашей солнечной системы, они начали применять анализ к решению вопросов небесной механики. Во многих астрономических вопросах переменной независимой служило не время, а вообще какая-нибудь угловая величина, поэтому в течении XVIII столетия появилось множество работ, главным образом, французских математиков «Sur les méthodes pour faire disparaître les arcs de cercle dans les approximations successives».

Мы ограничимся кратким очерком наиболее знаменитых из этих работ, именно мемуаров Лапласа, вошедших в VIII и IX томы полного собрания его сочинений, включенных затем в первый том его «Небесной Механики», в котором они составляют пятую главу второй книги, и мемуара Лагранжа, вошедшего в V том полного собрания его сочинений.

§ 3. Метода Лапласа состоит вкратце в следующем: пусть предложено уравнение

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q = 0 \tag{18}$$

в котором α малый параметр, P линейная функция с постоянными коэффициентами от y и его производных до порядка $(i-1)$, Q целая функция переменной y и ее производных до порядка $(i-1)$.

Положим, что для уравнения

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P = 0 \tag{19}$$

найден общий интеграл, содержащий i постоянных произвольных и не содержащий времени t вне знаков синуса и косинуса, и что для уравнения (18) составлено приближенное решение вида

$$y = X + t \cdot Y + t^2 \cdot Z + t^3 \cdot S + \ldots \tag{20}$$

в котором функции X, Y, Z, S ... содержат время t, только под знаками синуса и косинуса аргументов линейно зависящих от t, и произвольные постоянные

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots\ C_i$$

Если величину (20) подставить в уравнение (18), которому она по предположению удовлетворяет (с точностью до членов назначенного порядка k относительно α), то получится равенство вида:

$$K_0 + t \cdot K_1 + t^2 \cdot K_2 + \ldots = 0 \tag{21}$$

в котором K_0, K_1, K_2, ... суть функции синусов и косинусов аргументов линейно зависящих от t, и так как это равенство должно иметь место тожественно, то каждая из функций K_0, K_1, K_2 ... в отдельности должна быть тожественно равна нулю.

Дифференцирования синусов и косинусов аргументов линейно зависящих от t, не выводят переменной t из под знаков синуса и косинуса, поэтому при подстановке величины (20) в уравнение (18) множители $t, t^2, \ldots$ произошли от подобных же множителей в выражении (20); следовательно, если в этом выражении заменить вне функций X, Y, Z ... переменную t на $t - \theta$, то результат подстановки будет

$$K_0 + (t - \theta) \cdot K_1 + (t - \theta)^2 K_2 + \ldots = 0 \tag{22}$$

причем величины K_0, K_1, K_2 ... по прежнему тожественно равны нулю; равенство (22) показывает, что величина

$$y = X + (t - \theta) \cdot Y + (t - \theta)^2 \cdot Z + \ldots \tag{23}$$

есть также решение предложенного уравнения

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q = 0 \tag{18}$$

при любом постоянном значении θ.

Выражение (20) кроме i постоянных произвольных $C_1, C_2, \ldots C_i$ содержит таким образом еще произвольную постоянную θ; следовательно постоянные произвольные $C_1, C_2, \ldots C_i$ могут быть изменены так, что величина θ в выражении (23) исчезнет.

Положим, что эта замена выполнена, т. е. произвольные постоянные

$$C_1, C_2, \ldots C_i$$

заменены такими функциями

$$C_1(\theta),\ C_2(\theta),\ \ldots\ C_i(\theta) \tag{24}$$

переменной θ, что эта переменная из уравнения (17) исчезла, следовательно после такой замены будет иметь место *тожество*

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 \tag{25}$$

или в развитом виде

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} - Y + (t - \theta)\left[\frac{\partial Y}{\partial \theta} - 2Z\right] + (t - \theta)^2\left[\frac{\partial Z}{\partial \theta} - 3S\right] + \ldots = 0 \tag{26}$$

следовательно имеют место равенства:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial \theta} - Y = 0 \\ &\frac{\partial Y}{\partial \theta} - 2Z = 0 \\ &\frac{\partial Z}{\partial \theta} - 3S = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{27}$$

Но переменная θ входит в функции X, Y, Z лишь постолько, посколько она содержится в функциях

$$C_1(\theta);\ C_2(\theta);\ C_3(\theta)\ \ldots\ C_i(\theta)$$

поэтому частные производные $\frac{\partial X}{\partial \theta}; \frac{\partial Y}{\partial \theta}; \frac{\partial Z}{\partial \theta} \ldots$ будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \theta} &= \frac{\partial X}{\partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial X}{\partial C_2} \cdot C_2' + \ldots + \frac{\partial X}{\partial C_i} C_i' \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} &= \frac{\partial Y}{\partial C_1} C_1' + \frac{\partial Y}{\partial C_2} C_2' + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial C_i} C_i' \\ &\ldots\ldots\ldots \text{ и т. д. } \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{28}$$

причем

$$C_1' = \frac{dC_1}{d\theta}; \quad C_2' = \frac{dC_2}{d\theta}; \ldots C_i' = \frac{dC_i}{d\theta} \tag{28'}$$

По подстановке выражений (28) в уравнения (27) мы получим систему i дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными

$$C_1 \; C_2 \; \ldots \; C_i$$

и переменной независимой θ, величина же t в этой системе должна рассматриваться как постоянный параметр.

Интегрирование этой системы доставит искомые функции

$$C_1(\theta); \; C_2(\theta); \; \ldots \; C_i(\theta) \tag{24}$$

которые будут содержать i постоянных произвольных:

$$A_1, \; A_2, \; \ldots \; A_i \tag{29}$$

По подстановке выражений (24) в уравнение (23) переменная θ из него исчезнет.

Лаплас показывает, что результат этой подстановки получится, подставив величины (24) лишь в функцию X и заменив в ней затем букву θ на букву t.

Он это показывает следующим образом: напишем выражение (20) так

$$y = X + (t - \theta) \cdot R \tag{30}$$

тогда будет

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial \theta} - R + (t - \theta) \frac{\partial R}{\partial \theta}$$

и из равенства

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0$$

следует

$$R = \frac{\partial X}{\partial \theta} + (t - \theta) \frac{\partial R}{\partial \theta} \tag{31}$$

Дифференцируя это выражение по θ получим последовательно

$$2\frac{\partial R}{\partial\theta}=\frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2}+(t-\theta)\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2}$$

$$3\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2}=\frac{d^3 X}{\partial\theta^3}+(t-\theta)\frac{\partial^3 R}{\partial\theta^3} \tag{32}$$

. . . . и т. д. . . . . .

Исключая из уравнений (30) (31) (32) величину R и ее производные получим равенство

$$y=X+(t-\theta)\frac{\partial X}{\partial\theta}+\frac{(t-\theta)^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2}+\frac{(t-\theta)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial\theta^3}+\ldots \tag{33}$$

Обозначим правую часть этого равенства через $\Phi(t, \theta)$; очевидно, что правая часть равенства (33) представляет разложение функции

$$\Phi[t, \theta+(t-\theta)]$$

по степеням $(t-\theta)$, следовательно будет

$$y=\Phi(t, t)$$

т. е. величина y получится просто, подставив в выражение

$$y=X$$

вместо постоянных $C_1, C_2, C_3, \ldots C_i$ их выражения

$$C_1(\theta);\ C_2(\theta);\ C_3(\theta);\ \ldots\ C_i(\theta)$$

полученные через интегрирование системы (27), и заменив затем букву θ буквою t.

Заметим здесь же, что в выражение X, которое является общим интегралом линейного уравнения (19), буквы $C_1\ C_2\ \ldots\ C_i$ входят линейно.

В развитом виде система уравнений (27), служащих для определения неизвестных $C_1(\theta)$, $C_2(\theta)$ ..., будет:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial C_1}\cdot C_1'+\frac{\partial X}{\partial C_2}\cdot C_2'+\ldots+\frac{\partial X}{\partial C_i}\cdot C_i'=Y\\
&\frac{\partial Y}{\partial C_1}\cdot C_1'+\frac{\partial Y}{\partial C_i}\cdot C_2'+\ldots+\frac{\partial Y}{\partial C_i}\cdot C_i'=2Z\\
&\frac{\partial Z}{\partial C_1}\cdot C_1'+\frac{\partial Z}{\partial C_2}C_2'+\ldots+\frac{\partial Z}{\partial C_i}\cdot C_i'=3S
\end{aligned} \tag{34}$$

. . . . и т. д. . . . .

В этой системе, как уже сказано, переменная независимая есть θ, которая явно не содержится, переменная же t рассматривается как постоянный параметр; по поводу этой системы Лаплас пишет: «если продифференцировать $(i-1)$ раз к ряду по переменной t первое из уравнений (34), то получается столько же уравнений между величинами $C_1, C_2 \ldots C_i$ и их производными $C_1', C_2', \ldots C_i'$ по переменной θ. Интегрируя эти уравнения, считая θ за переменную независимую, мы получим выражения $C_1, C_2 \ldots C_i$ в функции θ. Почти всегда окажется, что достаточно будет пользоваться только первым уравнением (34), чтобы составить дифференциальные уравнения для $C_1, C_2 \ldots C_i$, уравняв в отдельности нулю коэффициенты при синусах и косинусах различной кратности аргументов, ибо величины $C_1, C_2, \ldots C_i$ не должны содержать времени t (т. е. равенства (34), и получаемые из них дифференцированием должны иметь место при всяком значении t). Упрощение, вносимое в выкладки этим соображением, составляет одно из главных достоинств методы».

«В бо́льшей части случаев», продолжает Лаплас, «эти уравнения могут быть интегрируемы лишь последовательными приближениями, которые могут ввести переменную θ вне знаков синуса и косинуса, хотя бы в точных интегралах эта переменная из под этих знаков и не выходила бы, тогда придется изложенным способом такие члены уничтожить».

«Если бы первое уравнение и следующие из него дифференцированием по t не доставило потребного для определения величин $C_1, C_2, \ldots C_i$ числа уравнений (независимых между собою), то надо обратиться ко второму уравнению системы (34) и т. д.»

«После того как величины $C_1, C_2, \ldots C_i$ найдены в функции переменной θ, надо их подставить в выражение X и заменить в нем букву θ через t; это и будет требуемое выражение y, не содержащее времени t вне знаков синуса и косинуса, когда это возможно. Если бы оказалось, что время t вне знаков синуса и косинуса не исчезает, то это служит признаком, что оно входит таким образом и в точное решение уравнения (18)».

Из подчеркнутых нами слов Лапласа видна та сложность, к которой изложенный процесс может вообще приводить — придется интегрировать систему уравнений первого порядка с i неизвестными. Уравнения этой системы могут оказаться не только с переменными коэффициентами, но даже нелинейными, и интегрирование системы будет представлять задачу более трудную, нежели интегрирование предложенного уравнения, для которого мы во всяком случае будем иметь исходное приближение, а для

системы и этого может не быть. Это составляет затруднение по существу применения методы.

Другое обстоятельство влечет за собою затруднение чисто практическое, — именно значительное усложнение выкладок, происходящее от того, что сперва надо развить с точностью до членов желаемого порядка относительно α решение уравнения (18) полностью с i постоянными произвольными.

По предположению уравнение

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P = 0 \tag{19}$$

имеет своим решением выражение

$$y = X$$

причем X содержит время t лишь под знаками синуса и косинуса аргументов, линейно зависящих от t; отсюда следует, что уравнение (19) содержит лишь производные четного порядка с постоянными при них коэффициентами, так что характеристическое уравнение имеет только чисто мнимые корни.

Пусть будет

$$i = 2j$$

и корни характеристического уравнения

$$\pm\lambda_1\sqrt{-1};\ \pm\lambda_2\sqrt{-1};\ \ldots\ \pm\lambda_j\sqrt{-1}$$

тогда будет

$$X = C_1\cos\lambda_1 t + C_2\sin\lambda_1 t + C_3\cos\lambda_2 t + C_4\sin\lambda_2 t \ldots + C_{i-1}\cos\lambda_j t + C_i\sin\lambda_j t$$

Здесь все постоянные произвольные входят линейно, но в выражения Y, Z, ... эти постоянные произвольные уже не будут входить линейно, а эти выражения будут целыми рациональными функциями постоянных произвольных C_1, C_2, ... C_i, и все эти выражения надо развивать *полностью*, оставляя C_1, C_2 ... C_i неопределенными и пользуясь начальными условиями лишь в самом конце для определения постоянных

$$A_1,\ A_2\ \ldots\ A_i,$$

введенных интегрированием уравнений (34).

Это значительно усложняет вид функций Y, Z, S, ..., ибо нельзя с самого начала воспользоваться теми упрощениями, которые вносятся частным видом начальных условий, например, таким: при $t=0$ должно быть:

$$y(0)=a;\ y'(0)=0;\ y''(0)=0;\ \ldots\ y^{(i-1)}(0)=0$$

Благодаря этому выкладки для получения величин Y, Z, S ... могут оказаться весьма продолжительными.

§ 4. Мемуар Лагранжа носит название «Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes» (Oeuvres de Lagrange, t. V, pp. 493—514).

Для удобства сравнения с методою Лапласа мы, излагая содержание мемуара Лагранжа, отступим от его обозначений и придержимся тех, которые сделаны при изложении методы Лапласа.

Лагранж также предполагает, что решение предложенного уравнения (18) развито до требуемых степеней параметра α в общем виде с i постоянными произвольными C_1, C_2, ... C_i и представлено тою же формулой

$$y=X+t\cdot Y+t^2\cdot Z+t^3\cdot S+\ldots \tag{20}$$

причем функции X, Y, Z, ... содержат время t лишь под знаками синусов, косинусов и показательных функций аргументов, линейно зависящих от t. В эти же функции X, Y, Z, ... входят и постоянные произвольные и притом, как мы уже обратили внимание, в функцию X — линейно, в остальные рационально в целых и положительных степенях. Таким образом при дифференцировании по переменной t функций X, Y, Z, ... время t не выходит из под знаков синуса, косинуса и показательной, и дифференцируя по t выражение (20) i раз подряд получим:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=\left(\frac{dX}{dt}+Y\right)+\left(\frac{dY}{dt}+2Z\right)t+\left(\frac{dZ}{dt}+3S\right)t^2+\ldots\\ \frac{d^2Y}{dt^2}&=\left(\frac{d^2X}{dt^2}+2\frac{dY}{dt}+2Z\right)+\left(\frac{d^2Y}{dt^2}+4\frac{dZ}{dt}+6S\right)t+\ldots\end{aligned} \tag{35}$$

. . . . и т. д. . . . .

Если эти выражения подставить в предложенное уравнение (18), то получится тождество, имеющее место при всяком значении буквы t, и так как в функциях X, Y, Z, S... буква t входит лишь под знаками синусов, косинусов и показательной, то множители, стоящие при каждой степени t, в отдельности должны быть равны нулю также тожественно.

Но член, не содержащий буквы t множителем, иначе содержащий t в нулевой степени, происходит только от тех членов формул (20), которые также множителя t не содержат; отсюда следует, что если в равенствах (35) брать в правых частях только первые члены, т. е. полагать

$$\begin{aligned} Y &= X \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{dX}{dt} + Y \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \frac{d^2 X}{dt^2} + 2\frac{dY}{dt} + 2Z \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (36)$$

то, по подстановке в уравнение (18) этих выражений, это уравнение будет удовлетворено.

При составлении выражений (35) величины $C_1, C_2 \ldots C_i$ рассматриваются как постоянные; если бы, продолжая рассматривать эти величины как постоянные, ограничиться в правых частях каждого из уравнений (36) лишь первым членом, то при подстановке значений

$$\begin{aligned} Y &= X \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{dX}{dt} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \frac{d^2 X}{dt^2} \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (37)$$

в уравнение (18) мы не получили бы тожества, т. е. при постоянных значениях величин $C_1, C_2, \ldots C_i$ выражение

$$Y = X$$

не есть решение предложенного уравнения

$$\frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha Q = 0 \qquad (18)$$

что и само собою очевидно, ибо это выражение есть лишь решение уравнения

$$\frac{d^i Y}{dt^i} + P = 0 \qquad (19)$$

но если постоянные $C_1, C_2, \ldots C_i$ заменить функциями

$$C_1(t),\ C_2(t) \ldots C_i(t)$$

времени t, то этими функциями можно распорядиться так, чтобы величина

$$Y = X \tag{38}$$

в которой постоянные $C_1, C_2, \ldots C_i$ заменены соответственно через

$$C_1(t),\ C_2(t) \ldots C_i(t)$$

была решением уравнения (18). Для этого стоит только выбрать эти функции так, чтобы при переменных $C_1, C_2, \ldots C_i$ производные от Y выражались бы теми же формулами (36) как и при постоянных; короче говоря, Лагранж применяет к рассматриваемому вопросу свой способ изменения произвольных постоянных.

При переменных $C_1, C_2, \ldots C_i$ следующая из равенства (38) величина производной $\frac{dY}{dt}$ есть

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial X}{\partial C_2} C_2' + \ldots + \frac{\partial X}{\partial C_i} \cdot C_i' \tag{39}$$

причем положено

$$C_1' = \frac{dC_1}{dt}; \quad C_2' = \frac{dC_2}{dt}; \ldots \quad C_i' = \frac{dC_i}{dt} \tag{39'}$$

но на основании второго из уравнений (37) эта величина должна равняться выражению

$$\frac{dX}{dt} + Y$$

составленному в предположении, что $C_1, C_2, \ldots C_i$ постоянные, но в этом предположении

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t}$$

и, следовательно, первое условное уравнение, которому надо подчинить переменные $C_1(t) \ldots C_i(t)$, есть

$$\frac{\partial X}{\partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial X}{\partial C_2} \cdot C_2' + \ldots + \frac{\partial X}{\partial C_i} \cdot C_i' = Y \tag{40,1}$$

тогда будет

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + Y \tag{41,1}$$

Дифференцируя это равенство по t, получим, считая $C_1, C_2, \ldots C_i$ переменными

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_1} \cdot C_1' + \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_2} C_2' + \ldots + \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_i} \cdot C_i' + \\ + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial C_1} C_1' + \frac{\partial Y}{\partial C_2} C_2' + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial C_i} C_i'$$

и, уравняв эту величину выражению

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\frac{\partial Y}{\partial t} + 2Z$$

ибо при постоянных $C_1, C_2, \ldots C_i$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}; \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t}$$

по упрощении получаем второе условное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_1} + \frac{\partial Y}{\partial C_1}\right) C_1' + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_2} + \frac{\partial Y}{\partial C_2}\right) C_2' + \ldots + \\ + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial C_i} + \frac{\partial Y}{\partial C_i}\right) C_i' = \frac{\partial Y}{\partial t} + 2Z \tag{40,2}$$

и равенство

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\frac{\partial Y}{\partial t} + 2Z. \tag{41,2}$$

Продолжая поступать таким образом пока не дойдем до $\frac{d^i Y}{dt^i}$, мы получим систему i дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными $C_1, C_2, \ldots C_i$ и переменной независимой t. Интегрированием этой системы определим эти величины как функции переменной t, причем войдут еще i постоянных произвольных $A_1, A_2, \ldots A_i$; подставив в выражение

$$Y = X$$

вместо входящих в него постоянных упомянутые функции, мы и получим требуемое решение, которое не будет содержать времени t вне знаков синуса, косинуса и показательных, если только при интегрировании сказанной системы время t не войдет алгебраически в выражения $C_1(t)$, $C_2(t) \ldots C_i(t)$.

Как видно и в методе Лагранжа требуется сперва в общем виде, т. е. с i постоянными произвольными, разложить решение предложенного уравне-

ния в ряд до требуемых степеней параметра α, и если при этом время t выйдет из под знаков синуса, косинуса или показательной, надо эти «вековые» члены уничтожить, что потребует интегрирования системы i дифференциальных уравнений, не только с переменными коэффициентами, но даже нелинейных, т. е. приведется во многих случаях к вопросу более трудному, нежели интегрирование предложенного уравнения. Это как раз имеет место, если применять изложенную методу к тем уравнениям, которые мы наметили как встречающиеся в технических вопросах.

Теория Лагранжа, как видно, проще теории Лапласа, но по выкладкам его метода сложнее методы Лапласа, ибо в системе уравнений Лагранжа время t, входящее под знаками синуса, косинуса и показательной, является переменной независимой, в методе же Лапласа принимается за произвольный постоянный параметр, что вносит указанное Лапласом упрощение в выкладках и в составление самой системы уравнений, служащей для определения величин $C_1, C_2, \ldots C_i$.

§ **5.** Само собою возникает вопрос, нельзя ли распорядиться вводимыми в решение предложенного уравнения произвольными или неопределенными величинами так, чтобы не приходилось сперва развивать решения полностью и затем в нем уничтожать вековые члены, а при самом составлении решения не дозволять этим членам появляться?

Весьма краткое указание на такой способ имеется в небольшой заметке М. В. Остроградского под заглавием «Note sur la méthode des approximations successives», помещенной в томе III, 6 серии мемуаров Академии Наук, вышедшем в 1840 году.

В этой заметке наш знаменитый математик обращает сперва внимание, что при разложении решения предложенного дифференциального уравнения в ряд по степеням малого параметра, заданного численно, надо его сперва заменить переменною (буквою) ω, по степеням которой и вести разложение, при этом Остроградский делает такое указание: «нет надобности писать повсюду ω вместо α, можно оставить α там, где это требуется удобством вычисления. Можно также изменять самое уравнение, или уравнения, лишь бы эти изменения пропадали, когда будет сделано $\omega = \alpha$».

Затем Остроградский берет для примера уравнение

$$y'' + y = \alpha y^3 \qquad (42)$$

при начальных условиях:

$$y(0) = 1;\; y'(0) = 0 \qquad (43)$$

и показывает, что, следуя обычной методе, получается с точностью до величин первого порядка относительно α решение

$$y = \cos t + \frac{\alpha}{32}(12t \sin t + \cos t - \cos 3t) \qquad (44)$$

после чего Остроградский пишет: «однако это выражение станет неточным вследствие множителя t, находящегося вне знака синуса».

«Чтобы избежать этого недостатка напишем предложенное уравнение в таком виде:

$$y'' + \left(1 - \frac{3}{4}\alpha\right) y = \frac{\omega}{4}(4y^3 - 3y) \qquad (45)$$

«полагая $\omega = \alpha$, получим заданное уравнение». Обозначим для краткости

$$1 - \frac{3}{4}\alpha = n^2 \qquad (46)$$

после чего обычным способом Остроградский получает решение

$$y = \cos nt + \frac{\alpha}{32n^2}(\cos nt - \cos 3nt) \qquad (47)$$

в котором время t содержится лишь под знаками косинуса. Это произошло потому, что в выражении

$$4y^3 - 3y$$

при подстановке в него первого приближения

$$y = \cos nt$$

член с $\cos nt$ пропадает, в самом деле будет

$$4y^3 - 3y = 4\cos^3 nt - 3\cos nt = \cos 3nt$$

Выражение же

$$4y^3 - 3y$$

в правой части получилось вследствие изменения в самом уравнении (42) коэффициента при y, представляющего квадрат частоты колебаний, на

$$n^2 = 1 - \frac{3}{4}\alpha$$

вместо первоначального значения 1.

Но приведя этот пример, Остроградский не указывает, чем надо руководствоваться при такого рода преобразованиях и как поступать для разыскания дальнейших членов разложения, содержащих множители α^2, α^3 и т. д., чтобы и в этих членах время t не выходило из под знаков синуса и косинуса, но намек на способ уже есть: надо надлежащим образом изменять частоту колебаний, как это будет показано ниже.

Заметим здесь же, что пример Остроградского относится как раз к так называемым возмущенным гармоническим колебаниям и встречается в техническом вопросе при исследовании качаний корабля, имеющего данную диаграмму остойчивости (см. ст. Scribanti в Transactions of the Institution of Naval Architects, vol. 46, 1904, London), но, само собою разумеется, что Остроградский этого приложения не имел в виду, ибо рассмотрение диаграмм остойчивости было введено Ридом в 1869 г.

§ **6.** В 1877 г. появилось знаменитое сочинение Лорда Rayleigh, Theory of Sound, в котором в § 67 рассматриваются гармонические колебания систем с одною степенью свободы и, между прочим, как раз то уравнение, которое служило примером Остроградскому, но лишь в слегка обобщенной форме, а именно при обозначении Рэйлея

$$\ddot{u} + n^2 u + \beta u^3 = 0 \tag{48}$$

по поводу этого уравнения в указанном сочинении говорится: «если принять за первое приближение

$$u = A\cos nt \tag{49}$$

и подставить его в член умноженный на β, то получится уравнение

$$\ddot{u} + n^2 u = -\frac{\beta A^3}{4}\cos 3nt - \frac{3\beta A^3}{4}\cos nt \tag{50}$$

Соответственно последнему члену в составе решения получился бы член, заключающий множитель $t \sin nt$, неопределенно возрастающий вместе с временем t. Это показывает подобно тому, что имеет место в теории Луны, что принятое в первом приближении решение в действительности совсем не составляет приближения или не остается таковым. Но если взять за исходное решение

$$u = A\cos mt \tag{51}$$

и выбрать надлежащим образом значение m, то мы увидим, что решение может быть представлено при помощи одних только периодических членов.

В самом деле, заранее очевидно, что единственно, что дозволительно предположить это, что движение приблизительно гармоническое с периодом приблизительно таким же как и при $\beta = 0$. Достаточно даже беглого рассмотрения, чтобы убедиться, что член пропорциональный u^3 не только может, но должен влиять на период. Вместе с тем очевидно, что решение, в котором период принят неправильно, хотя бы и на весьма малую величину, по прошествии достаточно долгого времени перестает представлять движение даже с грубым приближением».

«Мы возьмем таким образом за приближенное уравнение

$$\ddot{u} + n^2 u = -\frac{3\beta A^3}{4}\cos mt - \frac{\beta A^3}{4}\cos 3mt \tag{52}$$

решение которого есть

$$u = A\cos mt + \frac{\beta A^3}{4}\frac{\cos 3mt}{9m^2 - n^2} \tag{53}$$

предполагая что m взято так, что имеет место равенство:

$$A(-m^2 + n^2) = -\frac{3\beta A^3}{4}$$

т. е.

$$m^2 = n^2 + \frac{3\beta A^2}{4}» \tag{54}$$

Мы привели слова и выкладки Рэйлея буквально. Никаких пояснений к сказанному он не приводит и не указывает, каким образом вести приближение до более высоких степеней β так, чтобы и при них не появлялись вековые члены.

Не трудно видеть, что выкладка Рэйлея полностью и с надлежащими исправлениями может быть представлена так: очевидно, что можно писать

$$n^2 = m^2 + (n^2 - m^2) \tag{55}$$

и предположить, что разность $n^2 - m^2$ весьма мала, ибо при $\beta = 0$ она обращается в нуль; предложенное уравнение тогда будет

$$\ddot{u} + m^2 u + (n^2 - m^2)u + \beta u^3 = 0 \tag{56}$$

к этому уравнению надо присовокупить и начальные условия:

$$u(0) = A;\ \dot{u}(0) = 0 \tag{57}$$

которые следуют из того, что Рэйлей в первом приближении берет

$$u = A \cos mt \tag{51}$$

хотя о начальных условиях он не упоминает.

При условиях (57), отбрасывая в уравнении (56) малые члены, получим первое приближение из уравнения

$$\ddot{u} + m^2 u = 0$$

оно будет

$$u = A \cos mt$$

Второе приближение получится, написав заданное уравнение (48) так:

$$\ddot{u} + m^2 u = -(n^2 - m^2) u - \beta u^3 \tag{58}$$

и заменив в правой части величину u ее первым приближением; таким образом для второго приближения получается уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + m^2 u &= -(n^2 - m^2) A \cos mt - \beta A^3 \cos^3 mt = \\ &= -\left[(n^2 - m^2) A + \frac{3}{4}\beta A^3\right] \cos mt - \frac{1}{4}\beta A^3 \cos 3mt \end{aligned} \tag{59}$$

при прежних начальных условиях (57).

Чтобы решение этого уравнения не содержало вековых членов, надо взять m^2 так, чтобы в правой части член с $\cos mt$ пропадал, т. е. надо положить

$$A(n^2 - m^2) + \frac{3}{4}\beta A^3 = 0$$

откуда следует

$$m^2 = n^2 + \frac{3}{4}\beta A^2$$

При таком значении m^2 общий интеграл уравнения (59) будет

$$u = C_1 \cos mt + C_2 \sin mt + \frac{1}{32m^2}\beta A^3 \cos 3mt$$

Значения постоянных произвольных C_1 и C_2, удовлетворяющих начальным условиям, суть

$$C_1 = A - \frac{1}{32}\frac{\beta A^3}{m^2}$$

$$C_2 = 0$$

так что во втором приближении будет

$$u = A\cos mt + \frac{1}{32}\frac{\beta A^3}{m^2}(\cos 3mt - \cos mt) \tag{60}$$

Как видно решение это представляет гармоническое колебание с частотою основного тона m.

Результат, приведенный в сочинении Рэйлея физически верен, но он не следует из уравнения (52), ибо начальные условия не удовлетворены, и формула (53) представляет лишь частное решение, начальным условиям не удовлетворяющее.

В самом деле общий интеграл уравнения (52) есть

$$u = C_1\cos nt + C_2\sin nt + \frac{3\beta A^3}{4(m^2 - n^2)}\cos mt + \frac{\beta A^3}{4}\frac{\cos 3mt}{9m^2 - n^2}$$

и так как

$$m^2 - n^2 = \frac{3\beta A^2}{4}$$

то будет

$$u = C_1\cos nt + C_2\sin nt + A\cos mt + \frac{\beta A^3}{4}\frac{\cos 3mt}{9m^2 - n^2}$$

На основании начальных условий должно быть

$$u(0) = A; \quad \dot{u}(0) = 0;$$

следовательно

$$C_1 = -\frac{\beta A^3}{4(9m^2 - n^2)}; \quad C_2 = 0$$

так что

$$u = A\cos mt + \frac{\beta A^3}{4(9m^2 - n^2)}(\cos 3mt - \cos nt) \tag{61}$$

В последнем члене вместо $9m^2 - n^2$ можно брать просто $8m^2$, ибо это вводит лишь член с множителем β^2, а такие члены в этом приближении не рассматриваются, тогда будет

$$u = A\cos mt + \frac{1}{32}\frac{\beta A^3}{m^2}(\cos 3mt - \cos nt) \tag{61'}$$

Это решение уравнения (52), верное математически (до членов 2-го порядка относительно β), неверно физически, ибо, когда величины m и n несоизмеримы между собою, как это имеет место вообще, величина u не будет периодической в противность того, что Рэйлей искал. Произошло это по-

тому, что взятое им уравнение неверно и должно быть заменено нашим уравнением (59), которое и доставляет решение верное как математически, так и физически.

§ 7. В своей знаменитой докторской диссертации: «Общая задача об устойчивости движения», Харьков 1892, А. М. Ляпунов в § 33 для рассматриваемого им примера, частным случаем которого являются уравнения типа рассматриваемого нами, применяет методу совместного разложения по степеням начальной амплитуды как решения уравнения, так и частоты колебаний. Эта метода Ляпунова может быть видоизменена так, чтобы получать решение наших уравнений, ведя совместно и одновременно разложение по степеням входящего в уравнение малого параметра α решения уравнения и квадрата частоты колебаний, а не самой частоты; этим выкладки упрощаются и получают большую наглядность. Подобные разложения применял Линдшедт, но в иной форме.

Чтобы показать эту методу, начнем с уравнений типа

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = 0 \tag{1}$$

где $f(y)$ есть целая функция переменной y, степень низшего члена которой не меньше 2.

Для простоты выкладок возьмем уравнение, рассмотренное Остроградским и Рэйлеем, рассуждения же будем вести так, чтобы они оставались применимыми и к общему уравнению (1).

Итак положим, что надо разложить в ряд по степеням параметра α решение уравнения

$$y'' + n^2 y + \alpha y^3 = 0 \tag{62}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = a; \quad y'(0) = 0 \tag{63}$$

Прежде всего, если бы величины n^2 и α были заданы численно, заменяем эти числа буквами и ведем всю выкладку алгебраически на буквах и лишь в полученном окончательном решении подставляем вместо букв их численные значения.

Положим, что решение требуется разложить до третьей степени параметра α включительно, тогда полагаем

$$\begin{aligned} y &= \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \alpha^3 \varphi_3 \\ n^2 &= p^2 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 \end{aligned} \tag{64}$$

где φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 неизвестные функции, p^2 новая пока неизвестная постоянная, c_1, c_2, c_3 неопределенные коэффициенты, которыми будем распоряжаться так, чтобы в получаемых выражениях функций φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 время t не выходило из под знаков синуса и косинуса.

В этом совместном и одновременном разложении величины y и величины p^2, представляющей квадрат частоты возмущенных колебаний, и состоит сущность дела; остается выполнить соответствующие выкладки.

Подставив выражения (64) в предложенное уравнение и в начальные условия, получаем уравнение

$$\varphi_0'' + \alpha\varphi_1'' + \alpha^2\varphi_2'' + \alpha^3\varphi_3'' + (p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3)(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3) + \alpha(\varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3)^3 = 0$$

разложив левую часть этого уравнения по степеням буквы α, ограничиваясь третьей ее степенью, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_0'' + p^2\varphi_0 &+ \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 + c_1\varphi_0 + \varphi_0^3) \\ &+ \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_2\varphi_0 + c_1\varphi_1 + 3\varphi_0^2\varphi_1) \\ &+ \alpha^3(\varphi_3'' + p^2\varphi_3 + c_3\varphi_0 + c_2\varphi_1 + c_1\varphi_2 + 3\varphi_0^2\varphi_2 + 3\varphi_1^2\varphi_0) = 0 \end{aligned}$$

Так как это уравнение должно иметь место при **всяком** малом значении параметра α, то оно распадается на следующую систему:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 - \varphi_0^3 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2\varphi_0 - c_1\varphi_1 - 3\varphi_0^2\varphi_1 \\ &\varphi_3'' + p^2\varphi_3 = -c_3\varphi_0 - c_2\varphi_1 - c_1\varphi_2 - 3\varphi_0^2\varphi_2 - 3\varphi_0\varphi_1^2 \end{aligned} \tag{65}$$

Начальные условия по подстановке выражения (64) вместо y принимают вид

$$\varphi_0(0) + \alpha\varphi_1(0) + \alpha^2\varphi_2(0) + \alpha^3\varphi_3(0) = a$$
$$\varphi_0'(0) + \alpha\varphi_1'(0) + \alpha^2\varphi_2'(0) + \alpha^3\varphi_3'(0) = 0$$

и распадаются на следующие

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = a; \quad \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \quad \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \quad \varphi_2'(0) = 0 \\ &\varphi_3(0) = 0; \quad \varphi_3'(0) = 0 \end{aligned} \tag{66}$$

Первое уравнение системы (65) и соответствующее ему начальное условие дают

$$\varphi_0 = a\cos pt \tag{67}$$

подставив эту величину во второе уравнение, имеем

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1 a\cos pt - a^3\cos^3 pt =$$
$$= -\left(c_1 a + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt - \frac{1}{4}a^3\cos 3pt$$

Чтобы время t не выходило из под знака синуса, надо выбрать неопределенный коэффициент c_1 так чтобы член с $\cos pt$ в правой части пропадал, т. е. надо положить

$$c_1 a + \frac{3}{4}a^3 = 0$$

откуда

$$c_1 = -\frac{3}{4}a^2 \tag{68}$$

тогда будет

$$\varphi_1 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}\cos 3pt$$

соответствующее начальное условие дает

$$C_1 + \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2} = 0$$
$$C_2 = 0$$

следовательно будет

$$\varphi_1 = \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) \tag{69}$$

Таким образом решение, точное до членов первого порядка относительно α, есть

$$y = a\cos pt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) \tag{70}$$

причем

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 \tag{71}$$

Подставив значения φ_0 и φ_1 даваемые равенствами (67) и (69) в третье уравнение системы (65) имеем

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2 a \cos pt + \frac{3}{128}\frac{a^5}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt)$$
$$- \frac{3}{32}\frac{a^5}{p^2}\cos^2 pt\,(\cos 3pt - \cos pt)$$

по приведении правой части к косинусам кратных аргументов, получим

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -a\left(c_2 + \frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2}\right)\cos pt - \frac{3}{128}\frac{a^5}{p^2}(\cos 3pt + \cos 5pt)$$

следовательно надо взять

$$c_2 = -\frac{3}{128}\frac{a^4}{p^2} \tag{72}$$

тогда получим

$$\varphi_2 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{3}{1024}\frac{a^5}{p^2}\cos 3pt + \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^2}\cos 5pt$$

причем постоянные произвольные C_1 и C_2 на основании третьего начального условия будут

$$C_1 = -\frac{1}{256}\frac{a^5}{p^4}$$
$$C_2 = 0$$

таким образом будет

$$\varphi_2 = \frac{1}{1024}\frac{a^5}{p^4}(\cos 5pt + 3\cos 3pt - 4\cos pt) \tag{73}$$

следовательно с точностью до членов второго порядка

$$y = a\cos pt + \frac{1}{32}\frac{\alpha a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt)$$
$$+ \frac{1}{1024}\frac{\alpha^2 a^5}{p^4}(\cos 5pt + 3\cos 3pt - 4\cos pt) \tag{74}$$

причем на основании равенств (64), (68), (72) величина p^2 определяется уравнением

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{p^2} \tag{75}$$

Нет надобности решать это уравнение относительно p^2 точно, а надо получить лишь приближенное значение p^2, точное до вторых степеней буквы α, т. е. взять

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{n^2} \tag{76}$$

Ясно, что для получения φ_3 надо в последнее уравнение системы (65) подставить вместо φ_0, φ_1, φ_2 их выражения (67), (69) и (73), вместо коэффициентов c_1, c_2 их значения (68) и (72), развить правую часть по косинусам кратных аргументов, собрать члены с $\cos pt$, распорядиться неопределенным коэффициентом c_3 так, чтобы член с $\cos pt$ пропал, таким образом получим

$$\varphi_3'' + p^2\varphi_3 = \left(-ac_3 + \frac{3}{1024}\frac{a^7}{p^4}\right)\cos pt +$$
$$+ \frac{1}{4096}\frac{a^7}{p^4}[-6\cos 7pt - 15\cos 5pt + 3\cos 3pt].$$

Значит надо взять

$$c_3 = \frac{3}{1024}\frac{a^6}{p^4} \tag{77}$$

тогда на основании начальных условий будет:

$$\varphi_3 = \frac{1}{32768}\frac{a^7}{p^6}[\cos 7pt + 3\cos 5pt - 3\cos 3pt - \cos pt] \tag{78}$$

и следовательно с точностью до членов третьего порядка относительно α будет

$$\begin{aligned} y = a\cos pt &+ \frac{1}{32}\alpha\frac{a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) \\ &+ \frac{1}{1024}\alpha^2\frac{a^5}{p^4}(\cos 5pt + 3\cos 3pt - 4\cos pt) \\ &+ \frac{1}{32768}\alpha^3\frac{a^7}{p^6}(\cos 7pt + 3\cos 5pt - 3\cos 3pt - \cos pt) \end{aligned} \tag{79}$$

причем p^2 определяется уравнением

$$n^2 = p^2 - \frac{3}{4}\alpha a^2 - \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{p^2} + \frac{3}{1024}\alpha^3\frac{a^6}{p^4} \tag{80}$$

и так как величина p^2 требуется лишь до членов третьего порядка относительно α, то это уравнение можно заменить таким:

$$n^2 = p^2 - \frac{3}{4}\alpha a^2 - \frac{3}{128}\alpha^2 \frac{a^4}{n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2} + \frac{3}{1024}\alpha^3 \frac{a^6}{n^4}$$

откуда следует

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{3}{128}\alpha^2 \frac{a^4}{n^2} - \frac{21}{1024}\alpha^3 \frac{a^6}{n^4} \tag{81}$$

Из этого примера видно насколько изложенная метода проще методов Лапласа и Лагранжа: здесь не приходится развивать общего интеграла предложенного дифференциального уравнения, удерживая обе постоянные произвольные, одно это развитие потребовало бы гораздо более сложных выкладок, нежели получение вышеприведенного окончательного решения; чтобы не дозволять появляться членам, в которых время t выходит из под знака синуса или косинуса, нам достаточно всякий раз решать одно уравнение первой степени с одною неизвестною, в методах же Лапласа и Лагранжа пришлось бы сперва составить сложную систему двух дифференциальных уравнений и решить ее, что могло бы представить гораздо большие трудности, нежели решение предложенного уравнения.

Само собою понятно, что совершенно так же надо поступать и для всякого уравнения вида

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = 0 \tag{1}$$

в котором $f(y)$ есть любая целая функция не ниже второй степени относительно y; при этом, если бы разложение требовалось до членов порядка k относительно α, то надо полагать

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^k \varphi_k \tag{82}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_k\alpha^k \tag{83}$$

в остальном поступать как описано на примере.

При выполнении этих выкладок никаких затруднений не встретится, ибо при разыскании функции φ_i, по приведении степеней и произведений косинусов к кратным аргументам, в правой части будут получаться члены только с косинусами разных крайностей pt, и будет один член содержащий $\cos pt$, коэффициент при нем будет линейно зависеть от c_i, которое и определится из условия, чтобы член с $\cos pt$ пропадал.

Заметим здесь же, что начальное условие

$$y(0)=a;\ y'(0)=0 \tag{2}$$

существенно необходимо при этой методе; ниже (см. § 12) показано каким образом общее начальное условие

$$y(0)=A;\ y'(0)=B$$

приводится к виду (2).

§ **8.** Перейдем теперь к рассмотрению уравнений вида

$$y''+n^2y+\alpha F(y')=0 \tag{1'}$$

причем $F(y')$ есть целая функция от y'; начальные условия по прежнему пусть будут

$$y(0)=a;\ y'(0)=0 \tag{2}$$

Начнем с того простейшего случая, когда функция $F(y')$ четная не ниже второй степени относительно y', и опять все выкладки проведем для самого простого примера, ведя рассуждения так, чтобы они были приложимы и к общему случаю.

Самый простой пример уравнений типа ($1'$), при четной функции $F(y')$, представляют гармонические или вообще малые колебания маятника в среде, сопротивление которой пропорционально второй степени скорости и мало.

В этим случае уравнение движения будет вида

$$y''+n^2y\mp\alpha y'^2=0. \tag{84}$$

Двойной знак при члене $\alpha y'^2$ взят для того, чтобы отметить что этот член должен представлять сопротивление движению, поэтому при нем надо брать знак минус, когда y' отрицательное, и знак плюс, когда y' положительное, изменяя таким образом соответственно перемене знака y' самое уравнение движения.

Предполагая, что начальное отклонение

$$y(0)=a$$

положительное, будем иметь для первого полуразмаха уравнение

$$y''+n^2y-\alpha y'^2=0 \tag{85}$$

и начальное условие

$$y(0)=a;\ y'(0)=0. \tag{86}$$

Будем разлагать решение уравнения (83) в ряд по степеням α и для простоты выкладок ограничимся второю степенью этого параметра.

Полагаем

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 \tag{87}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 \tag{88}$$

тогда, по подстановке в уравнение (85), ограничиваясь второю степенью α, получаем

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 + \alpha(\varphi_1'' + p^2\varphi_1 - \varphi_0'^2) + \alpha^2(\varphi_2'' + p^2\varphi_2 + c_1\varphi_1 + \\ + c_2\varphi_0 - 2\varphi_0'\varphi_1') = 0$$

из этого уравнения следует система:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = \varphi_0'^2 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 + 2\varphi_0'\varphi_1' \end{aligned} \tag{89}$$

Начальные условия будут

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = a; \;\; \varphi'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \;\; \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \;\; \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Из первого уравнения, на основании первого начального условия, следует

$$\varphi_0 = a\cos pt \tag{91}$$

тогда второе уравнение будет

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = a^2p^2\sin^2 pt = \frac{1}{2}a^2p^2(1 - \cos 2pt)$$

следовательно

$$\varphi_1 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^2\cos 2pt$$

причем на основании начальных условий

$$C_1 = -\frac{2}{3}a^2; \quad C_2 = 0$$

таким образом имеем

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}a^2\cos pt + \frac{1}{6}a^2\cos 2pt \tag{92}$$

Третье уравнение системы (89) будет

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2 a\cos pt - c_1\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}a^2\cos pt + \frac{1}{6}\cos 2pt\right) - 2p^2a^3\sin pt\left[\frac{2}{3}\sin pt - \frac{1}{3}\sin 2pt\right]$$

В нашем распоряжении два неопределенных коэффициента c_1 и c_2, между тем нам придется для уничтожения члена с $\cos pt$ подчинить c_1 и c_2 одному условию, следовательно одну из этих величин можно взять по произволу; очевидно, что проще всего положить

$$c_1 = 0 \tag{93}$$

тогда по приведении к кратным аргументам имеем уравнение

$$\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = \left(-c_2 a + \frac{1}{3}p^2a^3\right)\cos pt - \frac{2}{3}p^2a^3 + \frac{2}{3}p^2a^3\cos 2pt - \frac{1}{3}p^2a^3\cos 3pt$$

следовательно надо положить

$$-c_2 a + \frac{1}{3}p^2a^3 = 0$$

т. е.

$$c_2 = \frac{1}{3}p^2a^2 \tag{94}$$

тогда будет

$$\varphi_2 = C_1\cos pt + C_2\sin pt - \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{9}a^3\cos 2pt + \frac{1}{24}a^3\cos 3pt$$

и на основании начальных условий

$$C_1 = \frac{61}{72}a^3;\quad C_2 = 0$$

так что

$$\varphi_2 = -\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{72}a^3\left(61\cos pt - 16\cos 2pt + 3\cos 3pt\right) \tag{95}$$

причем p^2 определяется уравнением

$$n^2 = p^2 + \frac{1}{3} p^2 a^2 \alpha^2 \tag{96}$$

т. е.

$$p = \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2}}$$

соответствующий период τ будет

$$\tau = \frac{2\pi}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2} \approx \frac{2\pi}{n} \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \alpha^2\right)$$

или, полагая

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{n}$$

имеем

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^2 \alpha^2} \approx \tau_0 \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \alpha^2\right).$$

Подставив найденные величины $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ в уравнение (87) имеем

$$\begin{aligned} y = a \cos \frac{2\pi t}{\tau} &+ \frac{1}{6} \alpha a^2 \left(3 - 4 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \cos \frac{4\pi t}{\tau}\right) \\ &- \frac{1}{72} \alpha^2 a^3 \left[48 - 61 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + 16 \cos \frac{4\pi t}{\tau} - 3 \cos \frac{6\pi t}{\tau}\right] \end{aligned} \tag{97}$$

Это уравнение имеет место до тех пор пока

$$y' < 0$$

т. е. до момента

$$t = t_1 = \frac{1}{2} \tau$$

когда будет

$$y' = 0$$

Отклонение маятника в этот момент есть

$$y = -a_1 = -\left(a - \frac{4}{3} \alpha a^2 + \frac{16}{9} \alpha^2 a^3\right) \tag{98}$$

Свой второй полуразмах маятник начнет с этого отклонения, причем уравнение его движения будет

$$y'' + n^2 y + \alpha y'^2 = 0 \tag{99}$$

Очевидно, что продолжительность этого второго полуразмаха будет

$$\frac{1}{2}\tau_1 = \frac{1}{2}\tau\sqrt{1+\frac{1}{3}a_1^2\alpha^2} = \frac{1}{2}\tau\left(1+\frac{1}{6}a_1^2\alpha^2\right) \tag{100}$$

и отклонение до которого он дойдет

$$a_2 = a_1 - \frac{4}{3}\alpha a_1^2 + \frac{16}{9}\alpha^2 a_1^2 \tag{101}$$

таким образом маятник будет продолжать качаться с постепенно убывающей амплитудой.

Очевидно, что совершенно подобным же образом проводятся выкладки и для разложения решения уравнения

$$y'' + n^2 y + \alpha F(y') = 0 \tag{102}$$

где $F(y')$ есть любая целая четная функция от y', степень которой не ниже второй.

Если бы разложение надо было вести до членов порядка k относительно α, то следовало бы положить

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^k\varphi_k \tag{103}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_k\alpha^k \tag{104}$$

и поступать как описано для примера.

При этом разложении никаких затруднений не возникнет, ибо в правых частях уравнений, служащих для определения функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$, будут появляться лишь члены четной степени относительно синусов различной кратности аргумента pt; эти члены будут выражаться через косинусы разной кратности этого аргумента, так что получится с аргументом pt только член с $\cos pt$, который и уничтожится, распоряжаясь соответствующим неопределенным коэффициентом c_i, совершенно подобно тому, как это имело место в нашем примере.

Изложенное заключение следует из формул, которыми выражаются степени синуса через синусы и косинусы кратных аргументов, а именно:

1°) при m четном:

$$\sin^m a = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos ma - m\cos(m-2)a + \right.$$
$$+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)a - \ldots + \tag{105}$$
$$\left. + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\left(\frac{1}{2}m\right)}\right]$$

2°) при m нечетном:

$$\sin^m a = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \left[\sin na - n \sin(n-2) a + \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin(n-4) a - \ldots + \tag{106}$$

$$\left. + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{m(m-1) \ldots \frac{1}{2}(m+3)}{1 \cdot 2 \ldots \left(\frac{1}{2} m - 1\right)} \sin a \right]$$

Так как от членов четной степени относительно y' будут получаться или четные степени синусов разной кратности или члены вида

$$\sin^l u \cdot \sin^h v,$$

где u и v кратные pt, причем сумма показателей $l + h$ есть число четное, то после приведения будут получаться только члены с косинусами pt, и нахождение функций $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_k$, никаких затруднений не представит.

§ 9. При изучении колебательного движения часто приходится иметь дело с уравнениями вида:

$$y'' + n^2 y + f(y) = 0 \tag{107}$$

$$y'' + n^2 y + F(y') = 0 \tag{108}$$

несодержащими малого параметра, но относящимися к колебаниям с малой амплитудой, так что величина β, входящая в начальные условия

$$y(0) = \beta; \;\; y'(0) = 0 \tag{109}$$

есть малая.

В таком случае надо искать решение этого уравнения в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням амплитуды β.

Поясним опять для простоты выкладок относящуюся сюда методу на простейших частных примерах.

Пусть дано уравнение

$$y'' + n^2 y + ky^3 = 0 \tag{110}$$

и начальные условия

$$y(0) = \beta; \;\; y'(0) = 0 \tag{109}$$

чтобы разложить решение этого уравнения в ряд по степеням малой величины β, полагаем

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \beta^3\varphi_2 + \ldots \tag{111}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \ldots \tag{112}$$

и, если желаем ограничиться, напр., членами третьего порядка относительно β, то удерживаем в разложениях y и n^2 лишь написанные выше члены.

Подставив выражения (111) и (112) в предложенное уравнение и начальные условия и уравняв нулю члены с одинаковою степенью β, получаем подобно предыдущему систему

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi = -c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 - k\varphi_0^3 \end{aligned} \tag{113}$$

и начальные условия

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = 1; \ \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \ \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \ \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{114}$$

отсюда следует

$$\varphi_0 = \cos pt; \tag{115}$$

затем

$$\varphi_1'' + p^2\varphi_1 = -c_1 \cos pt;$$

следовательно надо брать

$$c_1 = 0 \tag{116}$$

и будет

$$\varphi_1 = 0 \tag{116'}$$

так что φ_2 определяется уравнением

$$\begin{aligned} \varphi_2'' + p^2\varphi_2 &= -c_2\cos pt - k\cos^3 pt \\ &= -\left(c_2 + \frac{3}{4}k\right)\cos pt - \frac{k}{4}\cos 3pt \end{aligned}$$

значит надо брать

$$c_2 = -\frac{3}{4}k \tag{117}$$

тогда будет

$$\varphi_2 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{k}{32p^2}\cos 3pt$$

и на основании начальных условий

$$C_1 = -\frac{1}{32}\frac{k}{p^2}; \quad C_2 = 0$$

так что

$$\varphi_2 = \frac{1}{32}\frac{k}{p^2}[\cos 3pt - \cos pt] \tag{118}$$

Таким образом имеем

$$y = \beta \cos pt + \frac{1}{32}\frac{\beta^2 k}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) \tag{119}$$

причём

$$p^2 = n^2 + \frac{3}{4}k\beta^2 \tag{120}$$

Очевидно, что и для всякой целой функции $f(y)$ разложение решения в ряд до любой степени k начальной амплитуды может быть произведено, положив

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \beta^3\varphi_2 + \ldots + \beta^k\varphi_{k-1} \tag{121}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \ldots + c_{k-1}\beta^{k-1} \tag{122}$$

и, поступая как указано в примере.

В правых частях уравнений, служащих для определения

$$\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_{k-1}$$

будут получаться лишь степени и произведения степеней косинусов различных кратностей аргумента pt, которые приведутся к косинусам кратных аргументов и к члену с $\cos pt$; этот член можно будет уничтожать, имея в своем распоряжении неопределенный коэффициент, линейно в него входящий, так что никаких затруднений возникнуть не может.

§ **10.** Рассмотрим теперь уравнение вида

$$y'' + n^2 y + F(y') = 0 \tag{123}$$

при начальном условии

$$y(0) = \beta; \ y'(0) = 0 \tag{124}$$

Положим сперва, что функция $F(y')$ есть функция четная и поясним процесс на простейшем примере

$$y'' + n^2 y - ky'^2 = 0 \tag{125}$$

ограничиваясь третьей степенью амплитуды.

Полагаем

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2 \varphi_1 + \beta^3 \varphi_2 \tag{126}$$

$$n^2 = p^2 + c_1 \beta + c_2 \beta^2 \tag{127}$$

и поступая как раньше получаем систему

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2 \varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + p^2 \varphi_1 = - c_1 \varphi_0 + k\varphi_0'^2 \\ &\varphi_2'' + p^2 \varphi_2 = - c_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_0 + 2k\varphi_0' \varphi_1' \end{aligned} \tag{128}$$

и начальные условия

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = 1; \ \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \ \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \ \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{129}$$

на основании которых последовательно получаем

$$\varphi_0 = \cos pt \tag{130}$$

$$\varphi_1'' + p^2 \varphi_1 = - c_1 \cos pt + kp^2 \sin^2 pt = - c_1 \cos pt + \\ + \frac{kp^2}{2}(1 - \cos 2pt)$$

$$c_1 = 0 \tag{131}$$

$$\varphi_1 = \frac{k}{2} - \frac{2}{3} k \cos pt + \frac{k}{6} \cos 2pt \tag{132}$$

$$\varphi_2'' + p^2 \varphi_2 = - c_2 \cos pt - \frac{2k^2 p^2}{3}(2 \sin^2 pt - \sin pt \sin 2pt)$$

$$= - \frac{2}{3} k^2 p_2 - \left(c_2 - \frac{k^2 p^2}{3}\right) \cos pt +$$

$$+ \frac{2}{3} k^2 p_2 \cos 2pt - \frac{1}{3} k^2 p^2 \cos 3pt$$

$$c_2 = \frac{k^2 p^2}{3}$$

$$\varphi_2 = - \frac{2}{3} k^2 + \frac{1}{72} k^2 [61 \cos pt - 16 \cos 2pt + 3 \cos 3pt] \tag{134}$$

Таким образом для первого полуразмаха, т. е. пока

$$y' < 0$$

будет

$$\begin{aligned} y = \beta \cos pt + \beta^2 \cdot \frac{k}{6}(3 - 2\cos pt + \cos 2pt) \\ + \beta^3 \cdot \frac{k^2}{72}(-48 + 61\cos pt - 16\cos 2pt + 3\cos 3pt) \end{aligned} \tag{135}$$

причем p^2 определяется уравнением

$$n^2 = p^2 + \frac{1}{3}\beta^2 k^2 p^2 \tag{136}$$

т. е.

$$p^2 = \frac{n^2}{1 + \frac{1}{3}k^2\beta^2}$$

Очевидно, что все сказанное в конце § 8 относится и к этому случаю, так что разложение для любой четной функции $F(y')$ затруднений не представит.

В том случае, когда функция $F(y')$ нечетная и низшая степень ее членов есть первая, так что будет

$$F(y') = 2hy' + F_1(y') \tag{137}$$

причем $F_1(y')$ не ниже третьей степени относительно y', то и обычный прием разложения не представит затруднений, ибо время t не будет выходить из под знаков синуса, косинуса и показательной функции.

Для простоты выкладок поясним это на простейшем примере, взяв уравнение

$$y'' + 2hy' + n^2 y + ky'^3 = 0 \tag{138}$$

и начальное условие

$$y(0) = \beta;\ \ y'(0) = 0 \tag{139}$$

Ограничиваясь в разложении третьей степенью малой амплитуды β, полагаем

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \beta^3\varphi_2 \tag{140}$$

тогда после подстановки и группировки членов получим

$$\beta(\varphi_0'' + 2h\varphi_0' + n^2\varphi_0) + \beta^2(\varphi_1' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1) + \beta^3(\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + \\ + n^2\varphi_2 + k\varphi'^3) = 0$$

Отсюда следует система

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + 2h\varphi_0' + n^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_1'' + 2h\varphi_1' + n^2\varphi_1 = 0 \\ &\varphi_2'' + 2h\varphi_2 + n^2\varphi_2 = -k\varphi_0'^3 \end{aligned} \tag{141}$$

Начальные условия будут

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0) = 1; \ \ \varphi_0'(0) = 0 \\ &\varphi_1(0) = 0; \ \ \varphi_1'(0) = 0 \\ &\varphi_2(0) = 0; \ \ \varphi_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{142}$$

и мы получим

$$\varphi_0 = e^{-ht}\left(\cos n_1 t + \frac{h}{n_1}\sin n_1 t\right) \tag{143}$$

причем

$$n_1 = \sqrt{n^2 - h^2} \tag{144}$$

ибо при колебательном движении величина h меньше n.

Второе уравнение и второе начальное условие дают

$$\varphi_1 = 0 \tag{145}$$

Третье уравнение будет:

$$\varphi_2'' + 2h\varphi_2' + n^2\varphi_2 = k\frac{n^6}{n_1^3}e^{-3ht}\sin^3 n_1 t = \frac{kn^6}{4n_1^3}e^{-3ht}(3\sin n_1 t - \sin 3n_1 t)$$

благодаря множителю e^{-3ht} в правой части, общий интеграл этого уравнения будет вида

$$\begin{aligned} \varphi_2 = e^{-ht}(C_1\cos n_1 t + C_2\sin n_1 t) + e^{-3ht}(A\cos n_1 t + \\ + B\sin n_1 t + E\cos 3n_1 t + G\sin 3n_1 t) \end{aligned} \tag{146}$$

и время t не выйдет из под знака синуса и косинуса.

Совершенно также поступим и для любой целой функции $F(y')$, низший член которой есть $2hy'$, причем нет надобности, чтобы она была нечетной, в нее могут входить и члены четной степени, но тогда надо соответственно изменению знака при y' изменять знаки и при этих членах в механических вопросах, когда функция $F(y')$ представляет сопротивление движению.

Точно так же, если бы было предложено уравнение вида

$$y'' + n^2 y + f(y) + F(y') = 0 \tag{147}$$

причем $f(y)$ есть целая функция не ниже второй степени и $F(y')$ целая функция вида

$$F(y') = 2hy' + F_1(y'), \tag{148}$$

где $F(y')$ есть целая функция от y' не ниже второй степени, то обычный прием разложения по степеням амплитуды β, т. е. представление решения в виде ряда

$$y = \beta\varphi_0 + \beta^2\varphi_1 + \ldots + \beta^k \varphi_{k-1} \tag{149}$$

ведет к цели без всяких затруднений, так как время t не будет выходить из под знаков синуса и косинуса.

§ 11. До сих пор мы рассматривали уравнения, относящиеся к свободным колебаниям, так что их правая часть есть нуль; рассмотрим теперь случай вынужденных колебаний, т. е. когда в правой части уравнения находится заданная функция времени t, так что вместо уравнения (1) мы бы имели уравнение вида

$$y'' + n^2 y + \alpha f(y) = G(t) \tag{150}$$

и прежние начальные условия

$$y(0) = a; \;\; y'(0) = 0 \tag{151}$$

Поясним опять методу решения на частном примере

$$y'' + n^2 y + \alpha y^3 = G(t); \tag{152}$$

полагаем попрежнему

$$y = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \alpha^3\varphi_3 + \ldots \tag{153}$$

$$n^2 = p^2 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + \ldots \tag{154}$$

по подстановке и группировке членов, подобно тому как сделано в § 7, получим систему

$$\begin{aligned} &\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = G(t) \\ &\varphi''_1 + p^2\varphi_1 = -c_1\varphi_0 - \varphi_0^3 \\ &\varphi_2'' + p^2\varphi_2 = -c_2\varphi_0 - c_1\varphi_1 - 3\varphi_0^2\varphi_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{155}$$

и начальные условия

$$\begin{aligned} &\varphi_0(0)=a; \quad \varphi_0'(0)=0 \\ &\varphi_1(0)=0; \quad \varphi_1'(0)=0 \\ &\varphi_2(0)=0; \quad \varphi_2'(0)=0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{156}$$

Первое уравнение системы (155) на основании первого начального условия будет

$$\varphi_0 = a\cos pt + \frac{1}{p}\int_0^t G(\xi)\sin p(t-\xi)\,d\xi \tag{157}$$

Подставляем эту величину во второе уравнение, которое будет, после подстановки, вида

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + p^2\varphi_1 &= -c_1 a\cos pt - a^3\cos^3 pt + G_1(t) \\ &= -\left(c_1 a + \frac{3}{4}a^3\right)\cos pt - \frac{1}{4}a^3\cos 3pt + G_1(t) \end{aligned}$$

причем G_1 будет известная функция времени; берем

$$c_1 = -\frac{3}{4}a^2 \tag{158}$$

чтобы член с $\cos pt$ в правой части пропал, тогда будет на основании второго начального условия

$$\varphi_1 = \frac{1}{32}\frac{a^3}{p^2}(\cos 3pt - \cos pt) + \frac{1}{p}\int_0^t G_1(\xi)\sin p(t-\xi)\,d\xi \tag{159}$$

и продолжаем таким образом далее, пока не дойдем в разложении до требуемых степеней α.

В большей части случаев, встречающихся в практике, функция $G(t)$ будет вида

$$G(t) = g\cos mt + f\sin mt \tag{160}$$

причем g, f и m заданные постоянные, тогда нет надобности пользоваться общей формулой (157), а следует определять ча́стное решение по способу неопределенных коэффициентов.

Так в нашем случае первое уравнение было бы

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = g\cos mt + f\sin mt \tag{161}$$

решение которого есть

$$\varphi_0 = C_1\cos pt + C_2\sin pt + \frac{g}{m^2 - p^2}\cos mt + \frac{f}{m^2 - p^2}\sin mt \tag{162}$$

постоянные произвольные C_1 и C_2 будут

$$C_1 = a - \frac{g}{m^2 - p^2}; \quad C_2 = -\frac{mf}{p(m^2 - p^2)} \tag{162'}$$

Заметим здесь же, что знаменатель $m^2 - p^2$ при заданном m никогда нулем не будет, ибо если, развивая скажем до 2-х степеней α, мы бы получили

$$m^2 = p^2$$

то стоит только взять в разложении одним членом больше, и это равенство места иметь не будет, хотя знаменатель и будет весьма малый, но не нуль, и, значит, время t не выйдет из под знаков косинуса.

Совершенно так же поступим и для остальных типов рассмотренных нами уравнений; присутствие члена $G(t)$ в уравнении не вносит трудностей принципиального характера, хотя и может значительно усложнить выкладки и потребовать разложений до более высоких степеней малых параметров или малых амплитуд.

§ 12. Покажем теперь каким образом во всех рассмотренных случаях привести начальные условия к виду

$$y(0) = a;\ y'(0) = 0 \tag{2}$$

который мы предполагали.

Положим что начальные условия были бы заданы в виде

$$y(0) = A;\ y'(0) = B \tag{163}$$

как видно во всех рассмотренных случаях это изменение скажется только на условиях, относящихся к функции φ_0, которые тогда будут

$$\varphi_0(0) = A;\ \varphi_0'(0) = B \tag{164}$$

а так как φ_0 определяется уравнением

$$\varphi_0'' + p^2\varphi_0 = 0$$

то решение, удовлетворяющее условиям (164) будет

$$\varphi_0 = A\cos pt + \frac{B}{p}\sin pt \tag{165}$$

Положим

$$a\cos\delta = A;\ \ a\sin\delta = \frac{B}{p} \tag{166}$$

тогда будет

$$\begin{gathered} a = +\sqrt{A^2 + \frac{B^2}{p^2}} \\ \cos\delta = \frac{A}{a};\quad \sin\delta = \frac{B}{ap} \end{gathered} \tag{167}$$

этими формулами величины a и δ определяются вполне.

Таким образом будет

$$\varphi_0 = a\cos(pt - \delta) \tag{168}$$

ясно, что стоитто лько вместо переменной t взять переменную t_1, определяемую равенством

$$t = t_1 + \frac{\delta}{p} \tag{169}$$

и у нас будет

$$\varphi_0 = a\cos pt_1 \tag{170}$$

т. е. при $t_1 = 0$ должно быть

$$\varphi_0(0) = a;\ \ \varphi_0'(0) = 0 \tag{171}$$

От такого изменения переменной независимой ни предложенное уравнение, ни уравнения из него следующие, вида своего не изменяют. Так как все выкладки ведутся алгебраически на буквах, то величина p остается неопределенной до самого конца вычисления, когда для ее определения получится уравнение, подобное уравнению (80), которое и доставит численную величину p^2, после чего найдутся однозначно и численные величины a и δ.

§ **13.** Может возникнуть вопрос, являются ли ряды, первыми членами которых мы пользуемся, сходящимися, и при увеличении числа взятых членов, не будет ли приближение ухудшаться вместо того, чтобы улучшаться.

Исследования сходимости подобных рядов можно найти в упомянутой диссертации А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения»,

а также в сочинении H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, но они слишком сложны, чтобы их здесь приводить, но мы приведем § 118 из сочинения Poincaré, в котором он в следующих словах характеризует смысл, придаваемый слову «сходимость» математиками и астрономами: «между математиками и астрономами имеет место своего рода разногласие по поводу слова сходимость. Математики, озабоченные полною строгостью и зачастую относящиеся безразлично к длинноте неисполнимых вычислений, возможность которых они себе представляют, не имея в виду их на самом деле выполнять, говорят, что ряд сходящийся, когда сумма его членов приближается к определенному пределу, хотя бы первые члены и убывали весьма медленно. Наоборот, астрономы имеют обыкновение называть ряд сходящимся, когда, например, первые двадцать его членов весьма быстро убывают, хотя бы дальнейшие члены и возрастали бы неопределенно».

«Так рассмотрим простой пример, из двух рядов коих общие члены суть

$$\frac{1000^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

и

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1000^n}$$

математики назовут первый сходящимся и даже весьма быстро сходящимся, потому что милионный член гораздо меньше 999999-ого, второй же ряд они рассматривают как расходящийся, ибо его общий член может беспредельно возрастать».

«Астрономы, наоборот, примут первый ряд за расходящийся, потому что первые его 1000 членов идут возрастая; второй же ряд они сочтут за сходящийся, потому что первые 1000 членов идут убывая, и в начале это убывание весьма быстрое».

«Оба воззрения законны: первое в исследованиях теоретических, второе — в численных приложениях. Оба воззрения должны господствовать, но в двух различных областях, которые важно точно разграничить».

«Астрономам эти границы не всегда известны с точностью, но они редко их переходят; приближение, которым они довольствуются, их обыкновенно удерживает далеко внутри этих границ; кроме того, они руководствуются своим инстинктом, и если бы он ввел их в заблуждение, поверка наблюдениями вскоре обнаружила бы их ошибку».

Наша статья предназначена не для астрономов, имеющих в своем распоряжении более совершенные методы, а для техников и притом, главным образом, в области техники строительной, где нет надобности в той высокой точности, которая требуется в астрономии, но зато здесь и последствия ошибки совсем иные, нежели, когда одна из 2000 малых планет пройдет через Гриничский меридиан на несколько секунд раньше или позже, чем расчитано. Техник должен быть уверен в точности даваемого его расчетом результата в пределах практических допусков как в данных, так и в нужном ему результате.

Поверку всех наших разложений в ряды надо производить следующим образом: полученный ряд, проще всего в окончательной его численной форме, надо подставить в предложенное уравнение, в результате вместо нуля получится какое-то число; надо посмотреть, лежит ли это число в пределах допусков и тех погрешностей, которые имеются в самих данных, т. е. n^2, α, или иных величин, входящих в уравнение. Если лежит — точность результата достаточна, если не лежит, надо искать результат более точный.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

CAS REMARQUABLE DU SYSTÈME EN INVOLUTION DE n EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE L'ORDRE n D'UNE FONCTION INCONNUE À DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES

Par C. RUSSYAN

(*Présenté par* S. Bernstein, *membre de l'Académie des Sciences*)

§ **1.** J'ai considéré dans le mémoire précédent («Intégration de l'équation aux dérivées partielles de l'ordre quelconque d'une fonction inconnue des deux variables indépendantes», Bull. de l'Acad. Sc. de l'URSS, cl. des sciences math. et nat., 1932, № 8, p. 1029) le problème de la recherche de l'intégrale complète $z = f(x, y, C_1 \ldots C_N)$ de l'équation aux dérivées partielles de l'ordre n dans la forme résolue

$$\text{(I)} \qquad p_{n0} = \theta(x, y, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{n-11}, \ldots p_{0n}) \left(p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right)$$

c. à d. de cette intégrale, qui contient les

$$N = \frac{n(n+1)}{2} + n$$

constantes arbitraires $C_1, \ldots C_N$ par rapport auxquelles les N équations

$$z = f(x, y, C_1 \ldots C_N), \quad \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k} = \frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \, \partial y^k} \qquad i + k \leqslant n, \ 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

sont résolubles. Le problème se réduit à la recherche des n fonctions

$$u_i(x, y, z, p_{10} \ldots p_{0n}) \qquad i = 1 \ldots n$$

des $N+2$ variables indépendantes $x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}$ telles que

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n)}{\partial(p_{n-1,1} \ldots p_{0n})} \neq 0$$

satisfaisant aux n équations

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_n)}{d(xp_{n-2,2} \dots p_{0n})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \dots u_n)}{d(yp_{n-11} \dots p_{0n})} = 0,$$

(III)

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_n)}{d(xp_{n-11} \dots (p_{n-k-1k+1}) \dots p_{0n})} +$$

$$+ \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_n)}{d(yp_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{0n})} = 0 \qquad k = 1 \dots n-1$$

où les parenthèses dénotent l'omission de la variable correspondante et

$$\frac{\bar{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_{10}\frac{\partial}{\partial z} + p_{20}\frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{01}} + \dots +$$

$$+ \theta\frac{\partial}{\partial p_{n-10}} + p_{n-11}\frac{\partial}{\partial p_{n-21}} + \dots + p_{1n-1}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{02}\frac{\partial}{\partial p_{01}} + \dots +$$

$$+ p_{n-11}\frac{\partial}{\partial p_{n-10}} + p_{n-22}\frac{\partial}{\partial p_{n-21}} + \dots p_{0n}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}.$$

Puis on cherche les $N - n$ solutions $u_{n+1}, \dots u_N$ indépendantes de celles $u_1 \dots u_n$ du système complet de deux équations linéaires aux $N + 2$ dérivées

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_n)}{d(xp_{n-11} \dots p_{0n})} = 0, \quad \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_n)}{d(yp_{n-11} \dots p_{0n})} = 0.$$

Les fonctions $u_{n+1} \dots u_N$ sont complètement déterminées par celles $u_1 \dots u_n$. On résout enfin les equations

$$u_i(x, y, z \dots p_{0n}) = C_i \qquad i = 1 \dots N \quad \text{(a)}$$

par rapport aux $zp_{10} \dots p_{0n}$. La fonction

$$z = f(x, y, C_1 \dots C_N)$$

qu'on en tire est l'intégrale complète cherchée. Les équations (a) sont les N intégrales du système pfaffien (I')

$$\Omega^{(0)} = 0 \dots \Omega_{n-1}^{(n-1)} = 0$$

du mémoire cité.

Quant à la recherche des fonctions $u_1 \ldots u_n$, elles satisfont avec les fonctions $u_{n+1} \ldots u_N$ au système d'équations linéaires

$$\text{(III}_1\text{)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-2,2} \ldots p_{0n})} - \frac{\bar{d}(f, \theta, u_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{0n})} = 0, \\ &\frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-11} \ldots (p_{n-k-1k+1}) \ldots p_{0n})} + \\ &+ \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{0n})} = 0 \qquad k = 1 \ldots n-1 \end{aligned}$$

aux $N+2$ dérivées qui ne doit pas contenir plus que les deux équations indépendantes.

Il y a à distinguer les deux cas: quand ce système se réduit à deux équations indépendantes, et quand il se réduit à une seule équation. Je ne considère que le second cas. Le problème se réduit dans ce cas à la recherche, les fonctions $u_1 \ldots u_{n-1}$ étant déjà connues, de la solution u_n de l'équation linéaire

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(x, p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \ldots (p_{1n-1}) p_{0n})} = 0$$

telle que

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n)}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{0n})} \neq 0,$$

à l'intégration du système complet (IV) et à la résolution du système d'équations (a).

Il y a dans ce cas plusieurs intégrales complètes distinctes de l'équation différentielle donnée (I) qui satisfont et aux équations de l'ordre n

$$u_j(x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}) = C_j \quad j = 1 \ldots n-1 \left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right).$$

J'appelle le système de n équations de l'ordre n

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}), \; u_j(x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}) = C_j \quad j = 1 \ldots n-1$$

celui en involution.

Pour que le système (III_1) se réduise à une équation (VI) il faut et il suffit que les fonctions $u_1 \dots u_{n-1}$ satisfassent aux relations

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(x, p_{n-2,2} \dots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \dots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \dots p_{1n-1})} - \lambda_n^{n-1} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0,$$

(VI

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(x, p_{n-11} \dots (p_{n-k-1k+1}) \dots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{1n-1})} -$$

$$- \lambda_n^{n-k-1} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0 \qquad k = 1 \dots n-2$$

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}} = 0 \qquad i = 1 \dots n-1$$

étant

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0$$

où λ_n est la racine de l'équation algébrique du dégré n

$$\lambda^n + \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}} \lambda^{n-1} - \dots \pm \frac{\partial\theta}{\partial p_{0n}} = 0 \qquad \text{(b)}$$

On pent dire que dans ce cas les fonctions $u_1 \dots u_{n-1}$ déterminent celle u_n de la manière multiforme car il y a dans ce cas plusieurs systèmes distincts de fonctions $u_1 \dots u_N$ contenant celles $u_1 \dots u_{n-1}$, mais les diverses fonctions u_n.

Il y a le mode remarquable de la détermination des fonctions $u_1 \dots u_{n-1}$ satisfaisant aux relations (V), qui est lié avec la théorie des caractéristiques de l'équation donnée (I). La considération de ce cas est le sujet de ce mémoire.

La fonction u_{n-1} doit être la solution indépendante de celles $u_1 \dots u_{n-2}$ du système de n équations linéaires et homogènes

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-2})}{d(x, p_{n-22} \dots p_{1n-1})} - \frac{\bar{d}(f\theta u_1 \dots u_{n-2})}{d(y, p_{n-11} \dots p_{1n-1})} - \lambda_n^{n-1} \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-2})}{d(y, p_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0,$$

(VII_1)

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-2})}{d[x, p_{n-11} \dots (p_{n-k-1k+1}) \dots p_{1n-1}]} + \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-2})}{d(y, p_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{1n-1})}$$

$$- \lambda_n^{n-k-1} \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-2})}{d(y, p_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0 \qquad k = 1 \dots n-2$$

(VII)

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial f}{\partial p_{n-22}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = 0,$$

telle que

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0.$$

Parmi les $n-1$ premières équations (VII_1) de ce système (VII) qui ne contiennent que

$$\frac{\bar{d}f}{dx}, \frac{\bar{d}f}{dy}, \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}, \dots \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}$$

il ne peut y avoir plus que les deux équations indépendantes, car autrement il s'ensuivrait après l'élimination des

$$\frac{\bar{d}f}{dx}, \frac{\bar{d}f}{dy}$$

au moins une équation de la forme

$$a\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} + \dots + b\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0$$

et comme $u_1 \dots u_{n-1}$ sont les solutions, on aurait que

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{1n-1})} = 0,$$

ce qui est impossible. Cette circonstance donne les conditions pour les fonctions $u_1 \dots u_{n-2}$. Il y a à distinguer les deux cas: le système (VII_1) se réduit aux deux équations indépendantes, ou il se réduit à une équation. Considérons le premier cas. Dans ce cas les deux équations (VII_1) doivent être résolubles par rapport aux

$$\frac{\bar{d}f}{dx}, \frac{\bar{d}f}{dy}.$$

On peut démontrer que dans ce cas les fonctions $u_1 \dots u_{n-2}$ déterminent celle u_{n-1} de la manière unique. C'est évident si le système (VII) n'a qu'une solution u_{n-1} telle que ces

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0.$$

Si le système (VII) a les deux solutions indépendantes u_{n-1}, v_{n-1} telles que

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2}\, u_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0, \quad \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2}\, v_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0,$$

chaque système de fonctions $u_1 \dots u_{n-2}, u_{n-1}$ et celui $u_1 \dots u_{n-1}, v_{n-1}$ figure dans un groupe de plusieurs systèmes distincts de fonctions intégrales

$$u_1 \dots u_{n-2} u_{n-1} \dots u_N$$

et

$$u_1 \dots u_{n-2} v_{n-1} \dots v_N.$$

Les systèmes du premier groupe contiennent les fonctions $u_1 \dots u_{n-1}$, les systèmes du second groupe celles $u_1 \dots v_{n-1}$. On peut démontrer que dans ce cas les systèmes du second groupe ne sont pas distincts de ceux du premier groupe c. à d. que les fonctions $u_1 \dots v_{n-1} \dots v_N$ de chacun des systèmes du second groupe sont les fonctions des fonctions $u_1 \dots u_{n-1} \dots u_N$ d'un des systèmes du premier groupe, ou autrement dit que le système d'intégrales

$$u_1 = c_1 \dots u_{n-2} = c_{n-2}, \; v_{n-1} = \Gamma_{n-1} \dots v_N = \Gamma_N$$

du système pfaffien (I′) s'obtient de l'un des systèmes d'intégrales

$$u_1 = c_1 \dots u_{n-2} = c_{n-2}, \; u_{n-1} = c_{n-1} \dots u_N = c_N$$

par la transformation des constantes arbitraires.

Il suffit de démontrer pour ce but que les deux systèmes pfaffiens

$$\Omega^{(0)} = 0, \dots \Omega^{(n-1)}_{n-1} = 0, \; du_1 = 0, \dots du_{n-2} = 0, \; du_{n-1} = \Theta$$

et celui

$$\Omega^{(0)} = 0, \dots \Omega^{(n-1)}_{n-1} = 0, \; du_1 = 0, \dots du_{n-2} = 0, \; dv_{n-1} = 0$$

ont les-mêmes systèmes de N intégrales complètes. Soit le système (VII_1) dans la forme résolue

$$\frac{\overline{d}f}{dx} + a \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} + \dots + b \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

$$\frac{\overline{d}f}{dy} + \alpha \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} + \dots + \beta \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0.$$

On a en vertu des n identités

$$\frac{\overline{d}u_i}{dx} + a \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} + \dots + b \frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}} = 0 \qquad i = 1 \dots n-1$$

$$\frac{\overline{d}v_{n-1}}{dx} + a \frac{\partial v_{n-1}}{\partial p_{n-11}} + \dots + b \frac{\partial v_{n-1}}{\partial p_{1n-1}} = 0$$

que

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2} u_{n-1} v_{n-1})}{d(x, p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} = 0. \tag{c}$$

De la même manière

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2} u_{n-1} v_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} = 0. \tag{d}$$

Enfin en vertu des n identités

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}} = 0, \quad i=1 \ldots n-1$$
$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial v_{n-1}}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial v_{n-1}}{\partial p_{n-22}} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial v_{n-1}}{\partial p_{0n}} = 0$$

on a

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2} u_{n-1} v_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{0n})} = 0. \tag{e}$$

Il suit des relations (c), (d), (e) étant

$$\frac{\partial(u_1 \ldots n_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} \neq 0$$

que tous les déterminants du dégré n du tableau

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\bar{d}u_{n-1}}{dx} & \frac{\bar{d}u_{n-1}}{dy} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\bar{d}v_{n-1}}{dx} & \frac{\bar{d}v_{n-1}}{dy} & \frac{\partial v_{n-1}}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial v_{n-1}}{\partial p_{0n}}
\end{array}$$

sont nuls identiquement. Il en suit d'après la proposition de la page 1038 du mémoire cité que les expressions différentielles

$$\Omega^{(0)}, \ldots \Omega_{n-1}^{(n-1)}, \; du_1 \ldots du_{n-1}, \; dv_{n-1}$$

sont linéairement dépendantes. On a donc que

$$\lambda^{(0)} \Omega^{(0)} + \ldots + \lambda_{n-1}^{(n-1)} \Omega_{n-1}^{(n-1)} + \sum_1^{n-2} i \, \mu_i \, du_i + K du_{n-1} + L dv_{n-1} = 0.$$

Or $K \neq 0$, $L \neq 0$ car les éxpressions différentielles

$$\Omega^{(0)} \ldots \Omega_{n-1}^{(n-1)}, \; du_1 \ldots du_{n-1}$$

ainsi que celles

$$\Omega^{(0)}, \ldots \Omega_{n-1}^{(n-1)}, \; du_1 \ldots du_{n-2}, \; dv_{n-1}$$

sont d'après la proposition mentionnée linéairement indépendantes étant

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-2} u_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \cdots p_{1n-1})} \neq 0, \quad \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-2} v_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \cdots p_{1n-1})} \neq 0.$$

Donc les deux systèmes pfaffiens

$$\Omega^{(0)} = 0, \ldots \Omega_{n-1}^{(n-1)} = 0, \; du_1 = 0, \ldots du_{n-2} = 0, \; du_{n-1} = 0$$

et celui

$$\Omega^{(0)} = 0, \ldots \Omega_{n-1}^{(n-1)} = 0, \; du_1 = 0, \ldots du_{n-2} = 0, \; dv_{n-1} = 0$$

ont les-mêmes systèmes d'intégrales complètes, c. q. f. d. Il n'y a donc dans ce cas qu'un groupe de systèmes distincts de fonctions intégrales à savoir celui, qui contient les fonctions $u_1 \ldots u_{n-2}, u_{n-1}$. Nous dirons, que et dans ce cas les fonctions $u_1 \ldots u_{n-2}$ déterminent la fonction suivante u_{n-1} de la manière unique. La condition nécéssaire pour que les fonctions $u_1 \ldots u_{n-2}$ puissent déterminer celle u_{n-1} de la manière multiforme c. à d. pour que puissent éxister plusiers fonctions u_{n-1} qui figurent avec celles $u_1 \ldots u_{n-2}$ dans plusieurs systèmes tous distincts de fonctions intégrales

$$u_1 \ldots u_{n-1} \ldots u_\nu$$

est que le système (VII_1) se réduise à une seule équation.

Considérons maintenant le second cas. Soit

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \cdots p_{2n-2})} \neq 0.$$

La dernière équation du système (VII_1) pour $k = n - 2$ est

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-2})}{d(xp_{n-11} \cdots p_{2n-2})} + \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{2n-2}) p_{1n-1}]} -$$
$$- \lambda_n \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{2n-2})} = 0$$

dont le coefficient de $\frac{\overline{d}f}{dx}$ est

$$\frac{\partial(n_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})} \neq 0.$$

Les conditions nécéssaires et suffisantes pour que le système (VII_1) se réduise à une équation sont celles de la proportionalité des coefficients des

$$\frac{\overline{d}f}{dx}, \quad \frac{\overline{d}f}{dy}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \qquad s = 1 \ldots n-1$$

de toutes les équations (VII_1) à ceux de la dernière équation à laquelle se reduira tout le système (VII_1).

Les conditions de la proportionalité des coefficients des

$$\frac{\overline{df}}{dx}, \quad \frac{\overline{df}}{dy}$$

sont pour la première équation (VII_1)

$$\text{(A)} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-2,2} \cdots p_{1n-1})}, & -\lambda_n^{n-1} \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})} - \dfrac{\partial(\theta u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{1n-1})} \\ \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})}, & -\lambda_n \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})} + \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{2n-2})p_{1n-1}]} \end{vmatrix} = 0$$

et pour les autres

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1k+1}) \cdots p_{1n-1}]}, & -\lambda_n^{n-k-1} \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})} + \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{1n-1}]} \\ \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})}, & -\lambda_n \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})} + \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{2n-2})p_{1n-1}]} \end{vmatrix} = 0$$

$$k = 1 \ldots n-3.$$

Transformons-les.

Soit

$$\text{(f)} \qquad \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial [p_{n-11} \dots (p_{2n-2}) p_{1n-1}]} = (\mu + \lambda_n) \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{2n-2})}.$$

Alors les conditions (B) sont

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial [p_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{1n-1}]} = \mu \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial [p_{n-11} \dots (p_{n-k-1\,k+1}) \dots p_{1n-1}]} +$$
$$+ \lambda_n^{\,n-k-1} \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{2n-2})} \qquad k = 1 \dots n-3.$$

En donnant à l'indice k les valeurs $n-3, \dots 1$, en envisageant la relation (f) et en transformant chaque équation á l'aide de la précédente nous les obtiendrons avec la relation (f) dans la forme

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial [p_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{1n-1}]} =$$
$$= [\mu^{n-k-1} + \mu^{n-k-2}\lambda_n + \dots \lambda_n^{\,n-k-1}] \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{2n-2})} \qquad k = 1 \dots u-2.$$

ou en désignant la forme binaire du dégré $n-p$ par rapport à μ, x_n aux coefficients égaux à un

$$\mu^{n-p} + \mu^{n-p-1}\lambda_n + \dots + \lambda_n^{\,n-p}$$

par $(\mu, \lambda_n)^{(n-p)}$, dans la forme

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial [p_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{1n-1}]} =$$
$$= (\mu, \lambda_n)^{(n-k-1)} \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{2n-2})} \qquad k = 1 \dots n-2.$$

Les conditions (A) obtiennent en vertu de celles (B) la forme

$$[\lambda_n^{\,n-1} + \mu (\mu, \lambda_n)^{(n-2)}] + (\mu, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} -$$
$$- (\mu, \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{\partial \theta}{\partial p_{1n-1}} = 0$$

ou

$$(\mu, \lambda_n)^{(n-1)} + (\mu, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} -$$
$$- (\mu, \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{\partial \theta}{\partial p_{1n-1}} = 0.$$

Il s'ensuit que μ est la racine de l'équation du dégré $n-1$

$$(\lambda, \lambda_n)^{(n-1)} + (\lambda, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} -$$
$$- (\lambda, \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p_{1n-1}} = 0$$

dont les racines sont $\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}$. Soit $\mu = \lambda_{n-1}$.

Alors toutes les conditions (A) (B) sont

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial [p_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{1n-1}]} =$$
$$= (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-1)} \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{2n-2})} \qquad k = 1 \dots n-2$$

On peut présenter ces conditions dans une autre forme. Il en suit que

$$\frac{\partial (u_i u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{1n-1})} = 0 = \Big[(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-2,2}} +$$
$$+ \dots + (-1)^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}} \Big] \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{2n-2})} \qquad i = 1 \dots n-2$$

u que

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}} + \dots +$$
$$+ (-1)^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}} = 0. \qquad i = 1 \dots n-2.$$

Inversement, en substituant au lieu des $\frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}}$ $i = 1 \dots n-1$ leurs valeurs tirées de ces équations nous obtiendrons que

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial [p_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{1n-1}]} =$$
$$= (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-1)} \frac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{2n-2})} \qquad k = 1 \dots n-2.$$

Les conditions (A), (B) sont donc

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-2,2}} + \dots +$$
$$+ (-1)^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}} = 0 \qquad i = 1 \dots n-2$$

Considérons maintenant les conditions de la proportionalité des coefficients des $\frac{\overline{df}}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}}$ $s = 1 \dots n-1$. Soit d'abord $s < n-1$.

Pour que ces conditions aient la forme plus commode nous écrirons dans les déterminants fonctionels toutes les variables $p_{n-11}, \dots p_{1n-1}$ en mettant entre les parenthèses les variables p_{n-ss} qui sont omises et nous conviendrons de considérer comme nuls ces déterminants où sont omises les deux variables p_{n-ss} avec les mêmes paires d'indices.

Ces conditions sont pour la première équation

$$
\text{(C)} \qquad \left| \begin{array}{ll}
\dfrac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-22} \cdots p_{1n-1})}, & \dfrac{\bar{d} (u_1 \cdots u_{n-2})}{d [x (p_{n-11}) p_{n-22} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} + \\
 & \quad + \dfrac{\bar{d} (\theta u_1 \dots u_{n-2})}{d [y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} + \\
 & \quad + \lambda_n^{n-1} \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} \\
\dfrac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \cdots p_{2n-2})}, & - \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [x p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} - \\
 & \quad - \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{2n-2}) p_{1n-1}]} + \\
 & \quad + \lambda_n \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]}
\end{array} \right| = 0.
$$

Pour les autres équations, si $s \leqslant k$

$$
\text{(D)} \qquad \left| \begin{array}{ll}
\dfrac{\partial (u_1 \cdots u_{n-2})}{d [p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1k+1}) \cdots p_{1n-1}]}, & \dfrac{\bar{d} (u_1 \cdots u_{n-2})}{d [x p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{n-k-1k+1} \cdots p_{1n-1}]} + \\
 & \quad + \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [y p_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{n-1}]} - \\
 & \quad - \lambda_n^{n-k-1} \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} \\
\dfrac{\partial (u_1 \dots u_{n-2})}{\partial (p_{n-11} \cdots p_{2n-2})}, & \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [x p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} + \\
 & \quad + \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{2n-2}) p_{1n-1}]} - \\
 & \quad - \lambda_n \dfrac{\bar{d} (u_1 \dots u_{n-2})}{d [y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]}
\end{array} \right| = 0
$$

et si $s > k$

$$(E)\quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial(u_1 \cdots u_{n-2})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1k+1}) \cdots p_{1n-1}]}, \quad \dfrac{\bar{\partial}(u_1 \cdots u_{n-2})}{\partial[xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1k+1}) \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} + \\ \qquad + \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} + \\ \qquad + \lambda_n^{n-k-1} \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} \\ \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})}, \quad - \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} - \\ \qquad - \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{2n-2}) p_{1n-1}]} + \\ \qquad + \lambda_n \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} \end{array} \right| = 0.$$

Enfin si $s = n - 1$ ces conditions sont pour la première équation

$$(F)\quad \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-2,2} \cdots p_{1n-1})}, & \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(xp_{n-22} \cdots p_{2n-2})} + \dfrac{\bar{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{2n-2})} \\ \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})}, & \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{3n-3})} \end{array} \right| = 0$$

et pour les autres

$$(G)\quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1k+1}) \cdots p_{1n-1}]}, \quad \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1k+1}) \cdots p_{2n-2}]} + \\ \qquad + \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{2n-2}]} \\ \dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})}, \quad \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{3n-3})} \\ \qquad k = 1 \ldots n-3. \end{array} \right| = 0.$$

En vertu de la relation

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-tt}) \cdots p_{1n-1}]} = (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-t-1)} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{2n-2})}$$
$$t = 1 \ldots n-1$$

ces conditions obtiennent la forme

$$(C)\quad \begin{aligned} &\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[x(p_{n-11})p_{n-2,2}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{1n-1}]}+\frac{\bar d(\theta u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{1n-1}]}+\\ &+\lambda_n^{n-1}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{2n-2}]}+\\ &+(\lambda_{n-1},\lambda_n)^{(n-2)}\left[\frac{\bar d(u_1..u_{n-2})}{d[xp_{n-11}..(p_{n-ss})\;.p_{2n-2}]}+\frac{\bar d(u_1..u_{n-2})}{d[yp_{n-11}..(p_{n-ss})\;.(p_{2n-2})p_{1n-1}]}-\right.\\ &\left.-\lambda_n\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{2n-2}]}\right]=0.\end{aligned}$$

$$(D)\quad \begin{aligned} &\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots(p_{n-k-1\,k+1})\cdots p_{1n-1}]}+\\ &+\frac{\bar d(u_1\ldots n_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots(p_{n-kk})\cdots p_{1n-1}]}-\\ &-\lambda_n^{n-k-1}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{2n-2}]}-\\ &-(\lambda_{n-1},\lambda_n)^{(n-k-2)}\left(\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{2n-2}]}+\right.\\ &\left.+\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots(p_{2n-2})p_{1n-1}]}-\lambda_n\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{2n-2}]}\right)=0.\end{aligned}$$

$$(E)\quad \begin{aligned} &\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11}\cdots(p_{n-k-1\,k+1})\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{1n-1}]}+\\ &+\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-kk})\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{1n-1}]}+\lambda_n^{n-k-1}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{2n-2}]}+\\ &+(\lambda_{n-1},\lambda_n)^{(n-k-2)}\left(\frac{\bar d)u_1\ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{2n-2}]}+\right.\\ &\left.+\frac{d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots(p_{2n-2})p_{1n-1}]}-\lambda_n\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11}\cdots(p_{n-ss})\cdots p_{2n-2}]}\right)=0.\end{aligned}$$

$$(F)\quad \begin{aligned} &\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d(xp_{n-22}\cdots p_{2n-2})}+\frac{\bar d(\theta u_1\ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11}\cdots p_{2n-2})}-\\ &-(\lambda_{n-1},\lambda_n)^{(n-2)}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11}\cdots p_{3n-3})}=0,\end{aligned}$$

$$\frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-k-1k+1}) \ldots p_{2n-2}]} + \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{2n-2}]} -$$

(G)

$$- (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-2)} \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{3n-3})} = 0.$$

On peut démontrer que les conditions (C), (D), (E) sont la conséquence de celles (F), (G). On le démontre à l'aide des formules auxiliaires

$$\frac{\overline{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} = (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-s-1)} \frac{\overline{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{2n-2})} -$$

$$- (\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-1)} \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]},$$

(g)

$$\frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{n-tt}) \ldots p_{1n-1}]} =$$

$$= - (\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-s-1)} \frac{d(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-tt}) \ldots p_{2n-2}]} +$$

$$+ (\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-t-1)} \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]}.$$

On démontre ces formules en substituant dans les premières parties au lieu des $\frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}}$, $\frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}}$ leurs valeurs d'après les relations

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-1)} + (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{\partial \theta}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

$$(\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - (\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}} = 0 \qquad i = 1 \ldots n-2.$$

Considérons les conditions (C). On a qu'en vertu des formules (g)

$$\frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[x(p_{n-11}) p_{n-22} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} + \frac{\overline{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} +$$

$$+ \lambda_n^{n-1} \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} =$$

$$= (\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-s-1)} \left[\frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(xp_{n-22} \ldots p_{2n-2})} + \frac{\overline{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{2n-2})} \right] -$$

$$- (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-1)} \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} +$$

$$+ \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} [\lambda_n^{n-1} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-1)}].$$

et que

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{2n-2}) p_{1n-1}]} -$$

$$- \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} = \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} +$$

$$+ \lambda_{n-1} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} - (\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-s-1)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{3n-3})}.$$

Donc les conditions (C) sont

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-s-1)} \left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(xp_{n-22} \ldots p_{2n-2})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{2n-2})} - \right.$$

$$\left. - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{3n-3})} \right] -$$

$$- \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} [(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-1)} - \lambda_n^{n-1} - \lambda_{n-1} (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)}].$$

Or

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-1)} = \lambda_n^{n-1} + \lambda_{n-1} (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)}.$$

Donc les conditions (C) sont

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-s-1)} \left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(xp_{n-22} \ldots p_{2n-2})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{2n-2})} - \right.$$

$$\left. - (\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{3n-3})} \right] = 0 \qquad s = 1 \ldots n-2$$

et sont la conséquence de celles (F).

Considérons les conditions (D). On a en vertu des relations (g) que

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{n-k-1\,k+1}) \ldots p_{1n-1}]} +$$

$$+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{1n-1}]} -$$

$$- \lambda_n^{n-k-1} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} =$$

$$= - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-s-1)} \left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-k-1\,k+1}) \ldots p_{2n-2}]} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{2n-2}]} \right] +$$

$$+ (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-2)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]} -$$

$$- [\lambda_n^{n-k-1} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-1)}] \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{2n-2}]}$$

et que

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-1} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{2n-2}) p_{1n-1}]} -$$

$$- \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} = \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} +$$

$$+ \lambda_{n-1} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2}]}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-s-1)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{3n-3})}.$$

Donc les conditions (D) sont

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-s-1)} \left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\, k+1}) \cdots p_{2n-2}]} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n+kk}) \cdots p_{2n-2}]} - (\lambda_{n-11} \lambda_n)^{(n-k-2)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2}}{d(yp_{n-11} \cdots p_{3n-3}} \right] -$$

$$+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2}}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} [\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-1)} - \lambda_n^{n-k-1} -$$

$$- \lambda_{n-1} (\lambda_{n-11} \lambda_n)^{(n-k-2)}].$$

Or

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-1)} = \lambda_n^{n-k-1} + \lambda_{n-1} (\lambda_{n-1} \lambda_n)^{(n-k-2)}.$$

Donc les conditions (D) sont

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(k-s-1)} \left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\, k+1}) \cdots p_{2n-2}]} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{2n-2}]} - (\lambda_{n-11} \lambda_n)^{(n-k-2)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{3n-3})} \right] = 0$$

et sont la conséquence de celles (S).

Considérons enfin les conditions (E). On a d'après les formules (g) que :

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\, k+1}) \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} +$$

$$+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{1n-1}]} +$$

$$+ \lambda_n^{n-k-1} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} =$$

$$= (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-s-1)} \left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1 k+1}) \cdots p_{2n-2}]} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{2n-2}]} \right] -$$

$$- (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-2)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]} +$$

$$+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{2n-2}]}.$$

On voit que les conditions (E) ne diffèrent de celles (D) que par le signe. Elles ont donc la même forme et sont les conséquences de celles (G). Toutes les conditions cherchées pour les fonctions $u_1 \dots u_{n-2}$ sont en nombre n et ont la forme

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-2})}{d(xp_{n-2,2} \dots p_{2n-2})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \dots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \dots p_{2n-2})} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \dots p_{3n-3})} = 0,$$

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-2})}{d[xp_{n-11} \dots (p_{n-k-1\,k+1}) \dots p_{2n-2}]} + \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{2n-2}]} -$$

$$\text{(VIII)} \qquad -(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-k-2)} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \dots p_{3n-3})} = 0 \qquad k=1 \dots n-3$$

$$\lambda_n^{\,n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{\,n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}} = 0,$$

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-2,2}} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}} = 0 \qquad i=1 \dots n-2$$

avec l'inégalité

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{n-2})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{2n-2})} \neq 0$$

λ_{n-1}, λ_n étant les deux racines de l'équation algébrique du dégré n

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}} - \lambda^{n-1} \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial\theta}{\partial p_{0n}} = 0, \qquad \text{(b)}$$

et $(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(p)}$ la forme binaire du degré p par rapport aux λ_{n-1}, λ_n avec les coefficients égaux à un. Si les fonctions $u_1 \dots u_{n-2}$ y satisfont le système (VII_1) se réduit à une seule équation et la fonction u_{n-1} doit être déterminée du système linéaire homogène de deux équations

$$\frac{\bar{d}(f(u_1 \dots u_{n-2})}{d(xp_{n-11} \dots p_{2n-2})} + \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-2})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{2n-2})p_{1n-1}]} - \lambda_n \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-2})}{d(yp_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0$$

$$\text{(XI)} \qquad \lambda_n^{\,n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{\,n-2} \frac{\partial f}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = 0$$

avec la condition

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0.$$

Ce système peut avoir plusieurs solutions u_{n-1} figurant avec les fonctions $u_1 \dots u_{n-2}$ dans plusieurs systèmes distincts de fonctions intégrales

$$u_1 \dots u_{n-1} \dots u_N.$$

Si u_{n-1} est une des solutions mentionnées il y a plusieurs systèmes distincts de fonctions intégrales renfermant celles $u_1 \dots u_{n-1}$. S'il en est ainsi de sorte que les fonctions $u_1 \dots u_{n-2}$ déterminent celle u_{n-1} de la manière multiforme nous dirons que le système de $n-1$ équations de l'ordre n

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}),\ u_s(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}) = c_s \quad s=1\dots n-2$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k}\right)$$

est en involution du rang deux, étant le système

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n})\, u_s(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}) = c_s \quad h=1\dots n-1$$

celui en involution du rang un.

On peut démontrer la proposition plus générale suivante. La condition nécéssaire pour que tout système de fonctions

$$u_1 \dots u_{m+i-1} \quad i = 1 \dots n-m-1$$

puisse déterminer la fonction suivante u_{m+i} de la manière multiforme étant

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{m+i})}{\partial(p_{n-1 1} \dots p_{n-m-i\ m+i})} \neq 0,$$

c. à d. pour qu'il éxiste plusieurs fonctions u_{m+i} qui figurent avec celles $u_1 \dots u_{m+i-1}$ dans plusieurs systèmes tous distincts de fonctions intégrales

$$u_1 \dots u_{m+i-1}, u_{m+i}, \dots u_N$$

est que les fonctions $u_1 \dots u_m$ $m = 1 \dots n-2$ satisfassent aux n relations

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d(x p_{n-2,2} \dots p_{n-m\,m})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \dots u_m)}{d(y p_{n-1 1} \dots p_{n-m\,m})} -$$
$$-(\lambda_{m+1}, \dots \lambda_n)^{(m)} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d(y p_{n-1 1} \dots p_{n-m+1\,m-1})} = 0,$$

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d[x p_{n-1 1} \dots (p_{n-k-1\,k+1}) \dots p_{n-m\,m}]} + \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d[y p_{n-1 1} \dots (p_{n-k\,k}) \dots p_{n-m\,m}]} -$$
$$-(\lambda_{m+1}, \dots \lambda_n)^{(m-k)} \frac{\bar{d}(u^1 \dots u_m)}{d(y p_{n-1 1} \dots p_{n-m+1\,m-1})} = 0, \quad k=1\dots m-1$$

$$\text{(X)} \quad \lambda_n^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-1 1}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{0\,n}} = 0$$

$$(\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-1 1}} - (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{1\,n-1}} = 0$$

. . . .

$$(\lambda_{m+1}, \dots \lambda_n)^{(m)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-1 1}} - (\lambda_{m+1}, \dots \lambda_n)^{(m-1)} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-2,2}} + \dots +$$
$$+ (-1)^m \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-m-1\,m+1}} = 0 \quad i=1\dots m$$

étant

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_m)}{\partial (p_{n-1} \dots p_{n-m\,m})} \neq 0$$

où $\lambda_{m+1} \dots \lambda_n$ sont les racines de l'équation algébrique du dégré n

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} - \lambda^{n-2} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}} = 0 \qquad \text{(b)}$$

et $(\lambda_{p+1} \dots \lambda_n)^{(p-s)}$ $s = 0, 1 \dots p$ est la forme du dégré $p - s$ par rapport aux $\lambda_{m+1}, \dots \lambda_n$ avec les coefficients égaux à un.

Si les fonctions $u_1 \dots u_m$ y satisfont la fonction

$$u_{m+i} \quad i = 1 \dots n - m - 1$$

doit être la solution du système linéaire homogène de $n - (m + i) + 1$ équations

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{m+i-1})}{d(xp_{n-11} \dots p_{n-m-i+1,\,m+i-1})} + \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-m-i+1\,m+i-1}) p_{n-m-i\,m+i}]} -$$

$$- (\lambda_{m+i+1}, \dots \lambda_n{}^{(1)}) \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{m+i-1}}{d(yp_{n-11} \dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} = 0,$$

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = 0$$

$$(\mathrm{X}_1) \qquad (\lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \lambda_{n-1}, \lambda_n)^{(m-3)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-2,2}} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-2} \frac{\partial f}{\partial p_{1\,n-1}} = 0.$$

. . . .

$$(\lambda_{m+i+1}, \dots \lambda_n)^{(m+i)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - (\lambda_{m+i-11}, \dots \lambda_n)^{(m+i-1)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-2,2}} + \dots +$$

$$+ (-1)^{m+i} \frac{\partial f}{\partial p_{n-m-i-1\,m+i+1}} = 0$$

telle que

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n+i})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{n-m-i\,m+i})} \neq 0.$$

Ce système peut avoir plusieurs solutions u_{m+i} qui figurent avec les fonctions $u_1 \dots u_{m+i-1}$ dans plusieurs systèmes tous distincts de fonctions intégrales $u_1 \dots u_{m+i} \dots u_N$. Nous excluons pour le moment le cas $u_{m+i} = u_n$,

car dans ce cas la première équation (X_1), à laquelle devrait satisfaire la fonction u_n, est

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-11} \ldots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{1n-1})p_{0n}]} - -(\lambda_{n+1}, \ldots \lambda_n)^{(1)} \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{1n-1})} = 0$$

et perd le sens à cause du dernier terme. Cette proposition est vraie pour

$$m = n - 2.$$

On démontre sa généralité en concluant de m à $m-1$. Les raisonnements sont les mêmes que plus haut. Il ne reste qu'à généraliser cette proposition sur le cas $m + i = n$.

Nous transformerons pour ce but la première équation (X_1) ainsi que celle (VI). En développant les déterminants on obtient l'équation (X_1) sous la forme

$$\frac{\bar{d}f}{dx} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} + \\ + \frac{\bar{d}f}{dy}\left[\frac{\partial(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{\partial[p_{n-11} \ldots (p_{n-m-i+1\,m+i-1})p_{n-m-i\,m+i}]} - \right. \\ \left. -(\lambda_{m+i+1}, \ldots \lambda_n)^{(1)} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})}\right] + \\ + \sum_1^{m+i-1} s(-1)^s \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} + \\ + \sum_1^{m+i-1} s(-1)^s \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{n-m-i+1\,m+i-1})p_{n-m-i\,m+i}]} - \\ -(\lambda_{m+i+1}, \ldots \lambda_n)^{(1)} \sum_1^{m+i-1} s(-1)^s \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1}]} + \\ + (-1)^{m+i-1} \frac{\partial f}{\partial p_{n-m-i\,m+i}} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-2})}{d[yp_{n-11} \ldots p_{n-m-i+2\,m+i-2}]} = 0.$$

Or les fonctions $u_1 \ldots u_{m+i-1}$ satisfont aux relations

$$(\lambda_{m+i}, \ldots \lambda_n)^{(m+i-1)} \frac{\partial u_t}{\partial p_{n-11}} - \ldots + (-1)^{m+i-1} \frac{\partial u_t}{\partial p_{n-m-i\,m+i}} = 0 \quad t = 1 \ldots m+i-1$$

d'où en substituant au lieu des $\frac{\partial u_t}{\partial p_{n-m-i\,m+i}}$ leurs valeurs tirées de ces relations on a

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{\partial[p_{n-11} \ldots (p_{n-m-i+1\,m+i-1})\,p_{n-m-i\,m+i}]} =$$
$$= (\lambda_{m+i} \ldots \lambda_n)^{(1)} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})},$$
$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{n-m-i+1\,m+i-1})\,p_{n-m-i\,m+i}]} =$$
$$= -(\lambda_{m+i} \ldots \lambda_n)^{(m+i-s)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{n-m-i+2\,m+i-2})} +$$
$$+ (\lambda_{m+i} \ldots \lambda_n)^{(1)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-12} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1}]} \qquad s=1\ldots m+i-1.$$

En vertu de ces formules l'équation considérée devient

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_{m+i}\frac{\bar{d}f}{dy}\right) \frac{\partial[u_1 \ldots u_{m+i-1}]}{\partial[p_{n-11} \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1}]} -$$
$$- \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} \left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(xp_{n-2,2} \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} - \right.$$
$$\left. - (\lambda_{m+i} \ldots \lambda_n)^{(m+i-1)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-11} \ldots p_{n-m-i+2\,m+i-2}]} \right] +$$
$$+ \sum_1^{m+i-1} s(-1)^s \left[\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1}]} - \right.$$
$$\left. - (\lambda_{m+i}, \ldots \lambda_n)^{(m+i-s)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{n-m-i+2\,m+i-2})} \right] +$$
$$+ \sum_1^{m+i-1} s(-1)^s \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \lambda_{m+i} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1}]} +$$
$$+ (-1)^{m+i-1} \frac{\partial f}{dp_{n-m-i\,m+i}} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{n-m-i+2\,m+i-2})} = 0.$$

Mais les fonctions $u_1 \ldots u_{m+i-1}$ verifient les relations

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(xp_{n-22} \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} -$$
$$- (\lambda_{m+i}, \ldots \lambda_n)^{(m+i-1)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(yp_{n+1} \ldots p_{n-m-i+2\,m+i-2})} = 0,$$
$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} +$$
$$+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11} \ldots (p_{n-s+1\,s-1}) \ldots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} -$$
$$- (\lambda_{m+i}, \ldots \lambda_n)^{(m+i-s)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{n-m-i+2\,m+i-2})} = 0. \qquad s=1\ldots m+i-1.$$

En transformant à l'aide de ces relations le second et le troisième terme nous aurons

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_{m+i}\frac{\bar{d}f}{dy} + \frac{d\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\right)\frac{\partial(u_1\dots u_{m+i-1})}{\partial(p_{n-11}\dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\sum_1^{m+i-1} s(-1)^s\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-ss}}\frac{\bar{d}(u_1\dots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11}\dots(p_{n-ss})\dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} -$$

$$-\sum_2^{m+i-1} s(-1)^s\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}}\frac{\bar{d}(u_1\dots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11}\dots(p_{n-s+1\,s-11}\dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} +$$

$$+\sum_1^{m+i-1} s(-1)^s\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}}\lambda_{m+i}\frac{\bar{d}(u_1\dots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-1}\dots p_{n-ss})\dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} +$$

$$+(-1)^{m+i-1}\frac{\partial f}{\partial p_{n-m-i\,m+i}}\frac{\bar{d}(u_1\dots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11}\dots p_{n-m-i+2\,m+i-2})} = 0.$$

ou en changeant dans le troisième terme l'indice s en $s+1$ on a

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_{m+i}\frac{\bar{d}f}{dy} + \frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial f}{dp_{n-11}}\right)\frac{\partial(u_1\dots u_{m+i-1})}{\partial(p_{n-11}\dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} +$$

$$+\sum_1^{m+i-1} s(-1)^s\left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-ss}} +\right.$$

$$\left.+\lambda_{m+i}\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-s-s+11}}\right)\frac{\bar{d}(u_1\dots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11}\dots(p_{n-ss})\dots p_{n-m--i+1\,m+i-1})} = 0$$

— la forme cherché. Donc le système linéaire homogène (X_1) peut s'écrire

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_{m+i}\frac{\bar{d}f}{dy} + \frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\right)\frac{\partial(u_1\dots u_{m+i-1})}{\partial(p_{n-11}\dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} +$$

$$+\sum_1^{m+i-1} s(-1)^s\left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-ss}} +\right.$$

$$\left.+\lambda_{m+i}\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-s-1\,s+1}}\right)\frac{\bar{d}(u_1\dots u_{m+i-1})}{d(yp_{n-11}\dots(p_{n-ss})\dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} = 0,$$

$$\lambda_n^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = 0,$$

(X_2) . . . .

$$(\lambda_{m+i+1},\dots\lambda_n)^{(m+i)}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \dots + (-1)^{m+i}\frac{\partial f}{\partial p_{n-m-i-1\,m+i+1}} = 0.$$

5*

Je transformerai maintenant l'équation linéaire (VI) à laquelle satisfait la fonction u_n. En développant les déterminants on a cette équation dans la forme

$$\frac{\bar{d}f}{dx}\frac{\partial(u_1\ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11}\ldots p_{1n-1})}+\frac{\bar{d}f}{dy}\frac{\partial(u_1\ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11}\ldots(p_{1n-1})p_{0n}]}-$$
$$-\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-22}\ldots p_{1n-1})}+$$
$$+\sum_2^{n-1}s(-1)^s\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots p_{1n-1}]}+$$
$$+\sum_1^{n-1}s(-1)^s\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots(p_{1n-1})p_{0n}]}+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}=0.$$

Or

$$\frac{\partial(u_1\ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11}\ldots(p_{1n-1})p_{0n}]}=\lambda_n\frac{\partial(u_1\ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11}\ldots p_{1n-1})},$$
$$\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots(p_{1n-1})p_{0n}]}=-\lambda_n^{n-s}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}+$$
$$+\lambda_n\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots p_{1n-1}]}\qquad s=1\ldots n-1$$

et d'après les équations (V)

$$\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-22}\ldots p_{1n-1})}=-\frac{\bar{d}(\theta u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{1n-1})}+\lambda_n^{n-1}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}=$$
$$=-\frac{\bar{d}\theta}{dx}\frac{\partial(u_1\ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11}\ldots u_{n-1})}+\sum_1^{n-1}s(-1)^{s-1}\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-ss}}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots p_{1n-1}]}+$$
$$+\lambda_n^{n-1}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})},$$
$$\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots p_{1n-1}]}=\lambda_n^{n-s}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}-$$
$$-\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-s+1s-1})\ldots p_{1n-1}]}\qquad s=2\ldots n-1.$$

En substituant ces valeurs on obtient

$$\text{(V}_1\text{)}\quad \left(\frac{\bar{d}f}{dx}+\lambda_n\frac{\bar{d}f}{dy}+\frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\right)\frac{\partial(u_1\ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11}\ldots p_{1n-1})}+$$
$$+\sum_1^{n-1}s(-1)^s\left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-ss}}+\right.$$
$$\left.+\lambda_n\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}}+\frac{\partial f}{\partial p_{n-s-1s+1}}\right)\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots p_{1n-1}]}=0$$

la forme cherchée de cette équation.

Si l'on compare les relations (X) et les $n-(m+i)+1$ équations (X_1) avec celles (VI_1), (V) auxquelles satisfont les fonctions $u_1 \dots u_{n-1}$ et celle u_n, on voit qu'on obtient ces dernières en posant $m+i=n$ dans celles (X), (X_1). Donc la proposition précédente s'étend aussi sur le cas $m+i=n$ et on a la proposition générale: pour que les fonctions $u_1 \dots u_{m+i-1}$ puissent déterminer la fonction suivante u_{m+i} $i=1 \dots n-m$ de la manière multiforme il faut que les fonctions $u_1 \dots u_m$ $m=1 \dots n-1$ (et il suffit si $m=n-1$) satisfassent aux n relations

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d(xp_{n-2,2} \dots p_{n-m\,m})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \dots u_m)}{d(yp_{n-11} \dots p_{n-mm})} -$$

$$-(\lambda_{m+1} \dots \lambda_n)^{(m)} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d[yp_{n-11} \dots p_{n-m+1\,m-1})} = 0,$$

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d[xp_{n-11} \dots (p_{n-k-1\,k+1}) \dots p_{n-m\,m})} + \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-kk}) \dots p_{n-mm}]} -$$

$$-(\lambda_{m+1}, \dots \lambda_n)^{(m-k)} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d(yp_{n-11} \dots p_{n-m+1\,m-1})} = 0 \quad k=1 \dots m-1$$

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial u_t}{\partial p_{n-11}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_t}{\partial p_{0n}} = 0,$$

(XI) $$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\lambda_{m+1} \dots \lambda_n)^{(m)} \frac{\partial u_t}{\partial p_{n-11}} - \dots + (-1)^m \frac{\partial u_t}{\partial p_{n-m-1\,m+1}} = 0 \qquad t=1 \dots m$$

étant

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_m)}{\partial(p_{n-11} \dots p_{n-mm})} \neq 0.$$

Si ces relations sont satisfaites la fonction u_{m+i} doit être la solution du systeme linéaire homogène de $n-(m+i)+1$ équations

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_{m+1}\frac{\bar{d}f}{dy} + \frac{d\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\right) \frac{\partial\, u_1 \dots u_{m+i-1})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} +$$

$$+ \sum_1^{m+i-1} s(-1)^s \left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-ss}} +\right.$$

$$\left. + \lambda_{m-1}\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-s-1\,s+1}}\right) \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} = 0,$$

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = 0,$$

(XI_2) $$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\lambda_{m+i+1} \dots \lambda_n)^{(m+i)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \dots + (-1)^{m+i} \frac{\partial f}{\partial p_{n-m-i-1\,m+i+1}} = 0$$

telle que

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{m+i})}{\partial (p_{n-1} \dots p_{n-m-i\, m+i})} \neq 0.$$

étant $\lambda_{n+1}, \dots \lambda_n$ les racines de l'équation algébrique du dégré n

$$\lambda_n + \lambda^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}} = 0 \qquad \text{(b)}$$

et $(\lambda_{p+1}, \dots \lambda_n)^{(p-s)}$ $s = 0 \dots p$ la forme du dégré $p - s$ par rapport aux $\lambda_{p+1} \dots \lambda_n$ aux coefficients égaux à un. Ce système peut avoir plusieurs solutions u_{m+i} (et il les a effectivement pour $i = n - m$) telles que les fonctions u_{m+i} figurent avec celles $u_1 \dots u_{m+i-1}$ dans plusieurs systèmes tous distincts de fonctions intégrales $u_1 \dots u_{m+i} \dots u_N$.

Si les fonctions $u_1 \dots u_{m+i-1}$ déterminent effectivement celle

$$u_{m+i} \qquad i = 1 \dots n - m$$

de la manière multiforme nous dirons que le système de $m + 1$ équations aux derivées partielles de l'ordre n

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01} \dots p_{0n}), \; u_s(x, y, z, p_{10}, p_{01} \dots p_{0n}) = C_s \quad s=1 \dots m$$

$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k} \right)$$

est en involution du rang $n - m$ étant le système de n équations de l'ordre n

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01} \dots p_{0n}), \; u_s(x, y, z, p_{10}, p_{01} \dots p_{0n}) = C_s \quad s=1 \dots n-1$$

celui en involution du rang un.

Considérons de plus près le cas $m = 1$. Dans ce cas notre proposition s'énonce de la manière suivante: pour que les fonctions $u_1 \dots u_i$ étant

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_i)}{\partial (_{n-11} \dots p_{n-i\, i})} \neq 0$$

puissent détérminer la fonction suivante u_{i+1} $i = 1 \dots n - 1$ de la manière multiforme c. à d. pour qu'il existe plusieurs fonctions u_{i+1} qui figurent avec celles $u_1 \dots u_i$ dans plusieurs systèmes tous distincts de fonctions intégrales $u_1 \dots u_{i+1} \dots u_N$ il faut que la fonction u_1 satisfasse aux n relations

(XI′)

$$\frac{\bar{d} f}{dx} + \frac{\bar{d}(\theta f_1)}{d(y p_{n-11})} - (\lambda_2, \dots \lambda_n)^{(1)} \frac{\bar{d} f_1}{dy} = 0$$

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial f_1}{\partial p_{n-1}} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial p_{0n}} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\lambda_2, \dots \lambda_n)^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial p_{n-11}} - \frac{\partial f_1}{\partial p_{n-2,2}} = 0$$

étant

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} \neq 0.$$

Si ces relations sont satisfaites la fonction u_{i+1} doit être la solution du système linéaire homogène

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_{i+1}\frac{\bar{d}f}{dy} + \frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\right)\frac{\partial(u_1 \ldots u_i)}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{n-i\,i})} +$$

$$+ \sum_1^i s(-1)^s \left[\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}} + \right.$$

$$(XI_1') \quad \left. + \lambda_{i+1}\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-s-1\,s+1}}\right]\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_i)}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \cdot \cdot p_{n-i\,i}]} = 0$$

$$\lambda_n^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{n\ 11}} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = 0,$$

. . . .

$$(\lambda_{i+2} \ldots \lambda_n)^{(i+1)}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \ldots + (-1)^{i+1}\frac{\partial f}{\partial p_{n-i-2\,i+2}} = 0.$$

telle que

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{i+1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{n-i-1\,i+1})} \neq 0.$$

On peut démontrer que la fonction u_1 doit être l'invariant de l'équation donnée (I) correspondant à la racine λ_1. En effet, la première équation (XI′) peut être écrite

$$\frac{\bar{d}f}{dx} + \frac{\bar{d}f}{dy}\left[-\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}} - (\lambda_2, \ldots \lambda_n)^{(1)}\right] + \frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n), \ (\lambda_2 \ldots \lambda_n)^{(1)} = \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Cette équation est donc

$$\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_1\frac{\bar{d}f}{dy} + \frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} = 0.$$

Quant aux autres équations (XI_2') nous les représentons dans une autre forme.

Si

$$\alpha_{s-1}(\lambda_j) = \lambda_j^{s-1} + \lambda_j^{s-1} \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}} - \lambda_j^{s-3} \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-22}} + \ldots +$$
$$+ (-1)^s \frac{\partial\theta}{p_{n-s+1s-1}}, \qquad s = 2 \ldots n$$

l'équation algébrique du dégré $n-1$

$$\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\alpha_1(\lambda_1) + \lambda^{n-3}\alpha_2(\lambda_1) + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda_1) = 0$$

a les racines $\lambda_2, \ldots \lambda_n$. Donc

$$\lambda_n^{n-1} + \lambda_n^{n-2}\alpha_1(\lambda_1) + \ldots \alpha_{n-1}(\lambda_1) = 0,$$
$$(\lambda_{n-1}\lambda_n)^{(n-2)} + (\lambda_{n-1}\lambda_n)^{(n-3)}\alpha_1(\lambda_1) + \ldots + \alpha_{n-2}(\lambda_1) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\lambda_2 \ldots \lambda_n)^{(1)} + \alpha_1(\lambda_1) = 0.$$

Il suit donc des équations considérées

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial f}{\partial p_{n-22}} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} = 0,$$
$$(\lambda_{n-1}\lambda_n)^{(n-2)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - (\lambda_{n-1}\lambda_n)^{(n-3)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-22}} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\lambda_2 \ldots \lambda_n)^{(1)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \frac{\partial f}{\partial p_{n-22}} = 0$$

ayant égard aux identités précédentes que

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} = (-1)^{s-1}\alpha_{s-1}(\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} \qquad s = 2 \ldots n$$

Donc la fonction u_1 doit être la solution du système linéaire homogène

$$\frac{\overline{d}f}{dx} + \lambda_1 \frac{\overline{d}f}{dy} + \frac{\overline{d}\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} = (-1)^{s-1}\alpha_{s-1}(\lambda_1)\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} \qquad s = 2 \ldots n$$

telle que

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} \neq 0.$$

Il en suit que la fonction u_1 doit être l'invariant de l'équation donnée de l'ordre n (I) correspondant à la racine λ_1 telle que

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} \neq 0.$$

§ **2**. Si les fonctions $u_1 \ldots u_m$ satisfont aux relations (X), si chacune des fonctions u_{m+i} $i = 1 \ \ldots \ n - m$ est la solution du système correspondant (X_2) telle que

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{m+i})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{n-m-i\, m+i})} \neq 0$$

les fonctions $u_1 \ldots u_m \ u_{m+1} \ldots u_{n-1}$ ainsi déterminées sont celles du second cas, car elles satisfont aux relations (V) la fonction u_{n-1} étant la solution du système (VII) dont les $n - 1$ premières équations (VII_1) se réduisent à une seule équation telle que

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} \neq 0.$$

Ce mode de la détermination des fonctions $u_1 \ldots u_{n-1}$ est un de ceux pour déterminer les fonctions $u_1 \ldots u_{n-1}$ du second cas. Il permet de généraliser quelques propositions de la théorie des caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du second ordre.

Si les racines $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_e$ $(m < k+1 \leqslant l \leqslant n)$ sont inégales à la racine λ de moindre indice; si l'équation donnée (I) admet les invariants $v_{k+1} \ldots v_l$ correspondant à ces racines et si enfin ces invariants contiennent les variables $p_{n-11} \ldots p_{0n}$, alors on peut prendre les invariants $v_{k+1}, \ldots v_l$ pour les fonctions $u_{1\,k+1} \ldots u_l$ du second cas. En effet, si v_j est l'invariant correspondant à la racine λ_j, il satisfait aux équations

$$\text{(k)} \ \frac{\overline{d}f}{df} + \lambda_j \frac{\overline{d}f}{dy} + \frac{\overline{d}\theta}{dy} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} = (-1)^{s-1} \alpha_{s-1}(\lambda_j) \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} \quad s = 1 \ldots n$$

Il suit des dernières équations que

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}} + \lambda_j \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-s-1\, s+1}} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} \left[\frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}} + (-1)^s \left(\alpha_s(\lambda_j) - \lambda_j \alpha_{s-1}(\lambda_j) \right) \right].$$

Or

$$\alpha_s(\lambda_j) - \lambda_j \alpha_{s-1}(\lambda_j) = (-1)^{s-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}}.$$

Donc

$$\frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}} + (-1)^s \left(\alpha_s(\lambda_j) - \lambda_j \alpha_{s-1}(\lambda_j) \right) = \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}} - \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}} = 0.$$

On a par conséquent que

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}}+\lambda_j\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}}+\frac{\partial f}{\partial p_{n-s-1\,s+1}}=0 \qquad s=1\ldots n-1.$$

Puis l'équation algébrique du dégré $n-1$

$$\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}\alpha_1(\lambda_j)+\lambda^{n-3}\alpha_2(\lambda_j)+\ldots+\alpha_{n-1}(\lambda_j)=0$$

a les racines $\lambda_1\ldots\lambda_{j-1},\ \lambda_{j+1}\ldots\lambda_n$. Par conséquent

$$\begin{gathered}\lambda_n^{n-1}+\lambda_n^{n-2}\alpha_1(\lambda_j)+\ldots+\alpha_{n-1}(\lambda_j)=0,\\ (\lambda_{n-1}\lambda_n)^{(n-2)}+(\lambda_{n-1}\lambda_n)^{(n-3)}\alpha_1(\lambda_j)+\ldots+\alpha_{n-2}(\lambda_j)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\lambda_{j+1}\ldots\lambda_n)^{(j)}+(\lambda_{j+1}\ldots\lambda_n)^{(j-1)}\alpha_1(\lambda_j)+\ldots+\alpha_j(\lambda_j)=0.\end{gathered}$$

En vertu de ces identités il suit des équations (k) que

$$\begin{gathered}\lambda_n^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}=0,\\ (\lambda_{n-1}\lambda_n)^{(n-2)}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}-\ldots+(-1)^{n-2}\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\lambda_{j+1}\ldots\lambda_n)^{(j)}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}-\ldots+(-1)^{j}\frac{\partial f}{\partial p_{n-j-1\,j+1}}=0.\end{gathered}$$

Donc l'invariant v_j satisfait aux équations

$$\begin{gathered}\frac{\overline{df}}{dx}+\lambda_j\frac{\overline{df}}{dy}+\frac{\overline{d\theta}}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}}+\lambda_j\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}}+\frac{\partial f}{\partial p_{n-s-1\,s+1}}=0 \qquad s=1\ldots n-1\\ \lambda_n^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}=0,\\ (\lambda_{n-1}\lambda_n)^{(n-2)}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}-\ldots+(-1)^{n-2}\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\lambda_{j+1}\ldots\lambda_n)^{(j)}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}-\ldots+(-1)^{j}\frac{\partial f}{\partial p_{n-j-1\,j+1}}=0.\end{gathered}$$

On en voit que les invariants $v_{k+1}\ldots v_l$ satisfont aux équations (X_2) pour $i=k+1-m,\ldots l-m$.

Il reste encore á démontrer que

$$\Delta = \frac{\partial (u_1 \ldots u_k v_{k+1} \ldots v_t)}{\partial (p_{n-11} \ldots p_{n-tt})} \neq 0 \qquad t = k+1, \ldots l$$

étant

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_k)}{\partial (p_{n-11} \ldots p_{n-kk})} \neq 0.$$

On a en vertu des relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial p_{n-ss}} &= (-1)^{s-1} \alpha_{s-1}(\lambda_{k+1}) \frac{\partial v_{k+1}}{\partial p_{n-11}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial v_t}{\partial p_{n-ss}} &= (-1)^{s-1} \alpha_{s-1}(\lambda_t) \frac{\partial v_t}{\partial p_{n-11}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t &= k+1 \ldots l \\ s &= 1 \ldots n \end{aligned}$$

que

$$\Delta = \frac{\partial v_{k+1}}{\partial p_{n-11}} \cdots \frac{\partial v_t}{\partial p_{n-11}} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}}, \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-2,2}} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-t+1\, t-1}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-tt}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-11}}, \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-22}} \cdots \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-t+1\, t-1}} \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-tt}} \\ 1, -\alpha_1(\lambda_{k+1}) \ldots (-1)^{t-2}\alpha_{t-2}(\lambda_{k+1}), (-1)^{t-1}\alpha_{t-1}(\lambda_{k+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, -\alpha_1(\lambda_t) \ldots (-1)^{t-2}\alpha_{t-2}(\lambda_t), (-1)^{t-1}\alpha_{t-1}(\lambda_t) \end{vmatrix}$$

Chacune des équations du dégré $t-1$

$$(\lambda, \lambda_{t+1} \ldots \lambda_n)^{(t-1)} + (\lambda, \lambda_{t+1} \ldots \lambda_n)^{(t-2)} \alpha_1(\lambda_s) + \\ + \ldots + \alpha_{t-1}(\lambda_s) = 0 \qquad s = k+1, \ldots t$$

a les racines $\lambda_1 \ldots \lambda_t$ sauf la racine λ_s.

Ces équations ont donc la racine λ_t sauf la dernière équation

$$\varphi_t(\lambda) = (\lambda, \lambda_{t+1} \ldots \lambda_n)^{(t-1)} + (\lambda, \lambda_{t+1} \ldots \lambda_n)^{(t-2)} \alpha_1(\lambda_t) + \ldots + \alpha_{t-1}(\lambda_t) = 0$$

car λ_t est inégale à la racine λ de moindre indice.

Les fonctions $u_1 \ldots u_k$ satisfont à l'équation

$$(\lambda_t, \ldots \lambda_n)^{(t-1)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \ldots + (-1)^{(t-1)} \frac{\partial f}{\partial p_{n-tt}} = 0$$

Multiplions les éléments de la premiére colonne du déterminant précédent par $(\lambda_t, \ldots \lambda_n)^{(t-1)}$, ceux da la seconde colonne par $-(\lambda_t, \ldots \lambda_n)^{(t-2)}$, de l'avant dernière par $(-1)^{t-2}(\lambda_t, \ldots \lambda_n)^{(1)}$ et ajoutons les produits aux éléments de la dernière colonne multipliés par $(-1)^{t-1}$. Nous obtiendrons que

$$\Delta = (-1)^{(t-1)} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial p_{n-11}} \cdots \frac{\partial v_t}{\partial p_{n-11}} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-22}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-t+1\,t-1}} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-11}} & \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-22}} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-t+1\,t-1}} & 0 \\ 1, & -\alpha_1(\lambda_{k+1}) & \cdots & (-1)^{t-2}\alpha_{t-2}(\lambda_{k+1}), & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & -\alpha_1(\lambda_{t-1}) & \cdots & (-1)^{t-2}\alpha_{t-2}(\lambda_{t-1}), & 0 \\ 1, & -\alpha_1(\lambda_t) & \cdots & (-1)^{t-2}\alpha_{t-2}(\lambda_t), & \varphi_t(\lambda_t) \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta = (-1)^{t-1} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial p_{n-11}} \cdots \frac{\partial v_l}{\partial p_{n-11}} \varphi_t(\lambda_t) \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-22}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-t+1\,t-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-11}} & \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-22}} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial p_{n-t+1\,t-1}} \\ 1, & -\alpha_1(\lambda_{k+1}) & \cdots & (-1)^{t-2}\alpha_{t-2}(\lambda_{k+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & -\alpha_1(\lambda_{t-1}) & \cdots & (-1)^{t-2}\alpha_{t-1}(\lambda_{t-1}) \end{vmatrix}$$

où le déterminant de la seconde partie est semblable au déterminant précédent mais l'indice t est moindre d'une unité. En procédant de la sorte on obtiendra enfin que

$$\Delta = (-1)^{\frac{(t+k-1)(t-k)}{2}} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial p_{n-11}} \cdots \frac{\partial v_t}{\partial p_{n-11}} \varphi_t(\lambda_t)\varphi_{t-1}(\lambda_{t-1}) \cdots \varphi_{k+1}(\lambda_{k+1}) \cdot \frac{\partial(u_1 \ldots u_k)}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{n-kk})}.$$

Les dérivées $\frac{\partial v j}{\partial p_{n-11}}$ $j = k+1 \ldots t$ sont différentes de zéro, car autrement l'invariant correspondant ne contiendrait pas des variables $p_{n-11} \ldots p_{0n}$ en vertu des relations

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} = (-1)^{s-1} \alpha_{s-1}(\lambda j) \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} \qquad s = 1 \ldots n.$$

Les multiplicateurs $\varphi_t(\lambda_t), \ldots \varphi_{k+1}(\lambda_{k+1})$ sont de même différents de zéro car les racines $\lambda_{k+1} \ldots \lambda_t$ sont inégales à celles de moindre indice. Donc le déterminant

$$\Delta = \frac{\partial(u_1 \ldots u_k v_{k+1} \ldots v_t)}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{n-tt})} \qquad t = k+1 \ldots l$$

est différent de zéro étant

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_k)}{\partial(p_{n-1} \ldots p_{n-kk})} \neq 0.$$

c. q. f. d.

Si en particulier les racines $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$ sont inégales, si l'équation donnée (I) a les invariants correspondants $v_1 \ldots v_{n-1}$ contenant les variables $p_{n-11} \ldots p_{0n}$ on peut prendre ces invariants pour les fonctions

$$u_1 \ldots u_{n-1}.$$

Le système de n équations aux dérivées partielles de l'ordre n

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{0n}), \quad v_s(x, y, z, p_{10} p_{01} \ldots p_{0n}) = c_s \qquad s = 1 \ldots n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right)$$

est en involution du rang *un*.

Si toutes les racines $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ sont inégales, si l'équation donnée (I) a les n invariants correspondants contenant les variables $p_{n-11} \ldots p_{0n}$ on peut les prendre pour les fonctions $u_1 \ldots u_n$. L'équation donnée (I) n'a qu'une intégrale complète qui satisfait aux n équations de l'ordre n

$$v_s(x, y, z, p_{10} p_{01} \ldots p_{0n}) = c_s \qquad s = 1 \ldots n$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right).$$

Voici encore une généralisation. Si $m = 1$, s'il éxiste deux invariants indépendants v_1, w_1 correspondant à la racine λ_1; si chacun des

systèmes (X_2') a les deux solutions independantes $v_{i+1}\, w_{i+1}$ $i = 1 \ldots n-2$ on peut prendre pour les fonctions $u_1 \ldots u_{n-1}$ celles $\varphi_s(v_s, w_s)$ $s = 1 \ldots n-1$ où φ_s sont les fonctions arbitraires pourvu que soit

$$\frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1})}{\partial(p_{n-1} \ldots p_{1\,n-1})} \neq 0.$$

On peut dans ce cas résoudre le problème de Cauchy et déterminer l'intégrale de l'équation donnée (I) passant par la multiplicité donnée à une dimension d'éléments unis de l'ordre $n-1$

$$x = x_0(\omega),\ y = y_0(\omega),\ z = z_0(\omega) \ldots p_{0n-1} = p^0_{0n-1}(\omega)$$

En effet, on a que

$$dz_0(\omega) = p^0_{10}(\omega)\, dx_0(\omega) + p^0_{01}(\omega)\, dy_0(\omega),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dp^0_{0n-2}(\omega) = p^0_{1\,n-2}(\omega)\, dx_0(\omega) + p^0_{0n-1}(\omega)\, dy_0(\omega).$$

Si l'on détermine encore les fonctions $p^0_{n0}(\omega),\ p^0_{n-11}(\omega) \ldots p^0_{0n}(\omega)$ à l'aide des équations

$$p^0_{n0} = \theta\,[x_0(\omega),\ y_0(\omega), \ldots p^0_{0n-1}(\omega),\ p^0_{n-11}(\omega), \ldots p^0_{0n}(\omega)],$$
$$dp^0_{n-10} = p^0_{n0}(\omega)\, dx_0(\omega) + p^0_{n-11}(\omega)\, dy_0(\omega),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dp^0_{0n-1} = p^0_{1\,n-1}(\omega)\, dx_0(\omega) + p^0_{0n}(\omega)\, dy_0(\omega),$$

on aura la multiplicité d' une dimension d'éléments unis de l'ordre n

$$x = x_0(\omega),\ y = y_0(\omega), \ \ldots p_{0n} = p_{0n}{}^0(\omega)$$

satisfaisant à l'équation donnée

$$p_{n0} = \theta(x, y, z \ldots p_{0n}).$$

Si l'on met ces valeurs des $x,\ y, \ \ldots\ p_{0n}$ dans les fonctions $v_s,\ w_s$ $s = 1 \ldots n-1$ on déterminera les fonctions φ_s pour qu'on aie après cette substitution

$$\varphi_s(v_s, w_s) = 0 \qquad s = 1 \ldots n-1$$

identiquement. Cette multiplicité d'éléments de l'ordre n satisfait au système de n équations de l'ordre n en involution

$$p_{n0} = \theta(x, y, z \ldots p_{0n}),\ \varphi_s(v_s, w_s) = 0 \qquad s = 1 \ldots n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y_k}\right)$$

Si l'on détermine l'intégrale de ce système comme il a été exposé dans le § 2 du mémoire cité en éliminant le paramétre ω du système d'équations

$$y = y[x, x_0(\omega) \ldots p^0_{0n}(\omega)], \ \ldots p_{0n} = p_{0n}[x, x_0(\omega), \ \ldots p_{0n}(\omega)]$$

on obtiendra l'intégrale cherchée pourvu que le determiant

$$\frac{\partial(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-1})}{\partial(p_{n-11}, \ \cdots \ p_{1n-1})}$$

ne soit pas nul en vertu des équations

$$\varphi_1 = 0 \ldots \varphi_{n-1} = 0.$$

Exemple.

Soit donnée l'équation du troisième ordre

$$p_{30} = p_{21} \tag{I}$$

Déterminons les fonctions $u_1 \ldots u_{n-1}$ du second cas c. à d. celles u_1, u_2.

Dans ce cas $\theta \equiv p_{21}$ et l'équation algébrique du troisième dégré (b) est

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \tag{b}$$

dont les racines sont: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La fonction $v_1 = p_{21}$ est l'invariant correspondant à la racine $\lambda_1 = -1$, car

$$\frac{\bar{d}v_1}{dx} \equiv 0, \quad \frac{\bar{d}v_1}{dy} \equiv 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial p_{12}} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial p_{03}} \equiv 0,$$
$$\alpha_1(\lambda_1) \equiv 0, \ \alpha_2(\lambda_1) \equiv 0, \ \frac{\bar{d}\theta}{dy} \equiv 0$$

de sorte que

$$\frac{dv_1}{dx} + \lambda, \quad \frac{dv_1}{dy} + \frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial v_1}{\partial p_{21}} \equiv 0,$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial p_{12}} \equiv -\alpha_1(\lambda_1)\frac{\partial v_1}{\partial p_{21}}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial p_{03}} \equiv \alpha_2(\lambda_1)\frac{\partial v_1}{\partial p_{21}}$$

Soit $m = 1$ et prenons la fonction v_1 pour la fonction u_1. La fonction u_2 doit être la solution du système de deux équations (XI_1') étant

$$i = 1, \ n = 3, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$
$$\frac{\bar{d}f}{dx} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{03}} = 0 \tag{X_1'}$$

telle que

$$\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(\partial_{21} p_{12})} \neq 0$$

c. à d. que

$$\frac{\partial u_2}{\partial p_{12}} \neq 0.$$

Elle doit être une telle solution de l'équation

$$\frac{\overline{d}f}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + p_{10}\frac{\partial f}{\partial z} + p_{20}\frac{\partial f}{\partial p_{10}} + p_{11}\frac{\partial f}{\partial p_{01}} + p_{21}\frac{\partial f}{\partial p_{20}} + p_{21}\frac{\partial f}{\partial p_{11}} + p_{12}\frac{\partial f}{\partial p_{02}} = 0$$

indépendante de p_{03}.

Posons $u_2 = p_{11}\,p_{12} - p_{02}\,p_{21}$. C'est possible, car

$$\frac{\partial u_2}{\partial p_{12}} = p_{11} \neq 0.$$

Elle n'est pas l'invariant, car

$$\frac{\partial u_2}{\partial p_{12}} = p_{11}$$

et par conséquent elle ne satisfait pas ni à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial p_{12}} = \alpha_1(\lambda_1)\frac{\partial f}{\partial p_{21}}$$

ni aux équations

$$\frac{\partial f}{\partial p_{12}} = -\alpha_1(\lambda_i)\frac{\partial f}{\partial p_{21}}\,p_2 \qquad i = 2, 3.$$

Le système de trois équations aux dérivées partielles du troisième ordre

$$p_{30} = p_{21}, \quad p_{21} = c_1, \quad p_{11}\,p_{12} - p_{02}\,p_{21} = c_2$$
$$\left(p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\,\partial y^k} \quad i + k \leqslant 3, \quad i \leqslant 2\right)$$

est celui en involution.

Juin, 1932

Ц. К. РУССЬЯН. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ В ИНВОЛЮЦИИ n УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ n-го ПОРЯДКА В ИНВОЛЮЦИИ ОДНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

РЕЗЮМЕ

Эта статья представляет продолжение предыдущей («Intégration de l'équation aux dérivées partielles de l'ordre quelconque d'une fonction inconnue des deux variables indépendantes», Известия Академии Наук СССР, Отд. мат. и ест. наук, 1932, № 8, стр. 1029), в которой автор рассматривал задачу об определении полного интеграла дифференциального уравнения n-ого порядка

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}\, p_{01}, \dots p_{n-11} \dots p_{0n}) \qquad \text{(I)}$$
$$\left(p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k}\right)$$

с двумя переменными независимыми. Она приводится к определению $n-1$ независимых функций

$$u_i(x, y, z, p_{10} \dots p_{0n}) \qquad i = 1 \dots n-1$$

от

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 2$$

переменных независимых $x, y, z, p_{10}, \dots p_{0n}$, после чего требуется интегрирование систем только обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача имеет два случая. Автор занимался только вторым случаем, когда функции $u_i\ i = 1 \dots n-1$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(x, p_{n-2,2} \cdots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \dots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \cdots p_{1n-1})} - \lambda_n^{n-1} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \cdots p_{2n-2})} = 0,$$
$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(x_1 p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1k+1}) \cdots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{1n-1})} -$$
$$-\lambda_n^{n-k-1} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(y p_{n-11} \cdots p_{2n-2})} = 0 \qquad k = 1 \dots n-2$$
$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{1\,n-11}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}} = 0 \quad i = 1 \dots n-1 \quad \text{(V)},$$

где скобки указывают пропуск соответствующей переменной, а

$$\frac{\bar{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_{10} \frac{\partial}{\partial z} + p_{20} \frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{11} \frac{\partial}{\partial p_{01}} + \dots + \theta \frac{\partial}{\partial p_{n-10}} + \dots + p_{1n-1} \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}},$$
$$\frac{\bar{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + p_{01} \frac{\partial}{\partial z} + p_{11} \frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{02} \frac{\partial}{\partial p_{01}} + \dots + p_{n-11} \frac{\partial}{\partial p_{n-10}} + \dots + p_{0n} \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}},$$

и λ_n есть корень алгебраического уравнения n-ой степени

$$\lambda^n + \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} \lambda^{n-1} - \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-22}} \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}} = 0. \qquad \text{(a)}$$

В этом случае более чем один полный интеграл данного дифференциального уравнения (I) удовлетворяет системе n дифференциальных уравнений n-ого порядка

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, \dots p_{0n}),\ u_i(x, y, z, p_{10} \dots p_{0n}) = C_i \quad i = 1 \dots n-1$$
$$\left(p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right) \tag{II}$$

названной автором системой в инволюции. Всякий такой полный интеграл

$$z = \varphi(x, y, C_1 \dots C_N)\left(N = \frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$

определяется решением системы N конечных уравнений

$$u_i(x, y, z, p_{10} \dots p_{0n}) = C_i \qquad i = 1 \dots N$$

относительно $z, p_{10}, \dots p_{0n}$, где функция u_n есть какое-либо решение u_n линейного однородного уравнения

$$\frac{\bar{d}(f, u_1 \dots u_{n-1})}{d(x, p_{n-1}, \dots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(f, u_1 \dots u_{n-1})}{d(y, p_{n-11} \dots (p_{1n-1}) p_{0n})} = 0$$

такое, что

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_n)}{\partial(p_{n-11} \dots p_{0n})} \neq 0,$$

а $u_{n-1}, \dots u_N$ суть остальные независимые от $u_1 \dots u_n$ решения полной системы двух линейных однородных уравнений

$$\frac{\bar{d}(f_1 u_1 \dots u_n)}{d(x, p_{n-11} \dots p_{0n})} = 0; \quad \frac{\bar{d}(f, u_1 \dots u_n)}{d(y, p_{n-11} \dots p_{0n})} = 0.$$

Функции $u_1 \dots u_{n-1}$ определяют функцию u_n многозначно, т. е. есть несколько различных систем функций $u_1 \dots u_N$, заключающих все функции $u_1 \dots u_{n-1}$, но различные функции u_n. Задача сводится в этом случае к определению функций $u_1 \dots u_{n-1}$, удовлетворяющих соотношениям (V). В настоящей статье автор рассматривает замечательный случай определения их, имеющий связь с характеристиками данного дифференциального уравнения (1).

Именно, функции $u_1 \dots u_m$, где $m \leqslant n-1$ определяются таким образом, чтобы функции $u_1 \dots u_{m+i-1}$ могли определять следующую функцию

$$u_{m+i}\,(m + i \leqslant n)$$

многозначно, т. е. чтобы могли существовать несколько различных систем функций $u_1 \dots u_N$, заключающих все функции $u_1 \dots u_{m+i-1}$, но различные функции u_{m+i}. Для этого необходимо, чтобы функции $u_1 \dots u_m$ удовлетворяли соотношениям

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d(x, p_{n-22} \dots p_{n-mm})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \dots u_m)}{d(y p_{n-11} \dots p_{n-mm})} -$$
$$- (\lambda_{m+1}, \dots \lambda_n^{(m)}) \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_m)}{d(y p_{n-11} \dots p_{n-mm})} = 0$$

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_m)}{d[\lambda p_{n-11} \cdots (p_{-k-1\,k+1}) \cdots p_{n-mm}]} + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_m)}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{n-mm}]} -$$

$$-(\lambda_{m+1}, \ldots \lambda_n)^{(m-k)} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_m)}{d(yp_{n-11} \cdots p_{n-m+1\,m-1})} = 0 \quad k = 1 \ldots m-1$$

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial u_t}{\partial p_{n-11}} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_t}{\partial p_{0n}} = 0 \qquad \text{(XI)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\lambda_{m+1}, \ldots \lambda_n)^{(m)} \frac{\partial u_t}{\partial p_{n-11}} - \ldots + (-1)^m \frac{\partial u_t}{\partial p_{n-m-1\,m+1}} = 0 \quad t = 1 \ldots m,$$

где $\lambda_{m+1} \ldots \lambda_n$ суть корни уравнения (а), а $(\lambda_{m+1}, \ldots \lambda_n)^{(m-s)}$ $s = 0, 1 \ldots m-1$ есть форма $m-s$-ой степени относительно $\lambda_{m+1} \ldots \lambda_n$ с коэффициентами, равными единице; а всякая функция u_{m+i} должна удовлетворять системе

$$n-(m+i)+1$$

линейных однородных уравнений

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_{m+i}\frac{\bar{d}f}{ay} + \frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\right)\frac{\partial(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} +$$

$$+\sum_{1}^{m+i-1} s(-1)^s \left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-ss}} + \lambda_{m+i}\frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f}{dp_{n-s-1\,s+1}}\right)\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{m+i-1})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{n-m-i+1\,m+i-1})} = 0 \qquad \text{(XI}_2\text{)}$$

$$\lambda_n^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - 0, \ldots (\lambda_{m+i+1} \ldots \lambda_n)^{(m+i)}\frac{\partial f}{\partial p_{-11}} - \ldots +$$

$$+(-1)^{m+i}\frac{\partial f}{\partial p_{n-m-i-1\,m+i+1}} = 0,$$

где $(\lambda_{m+i+1}, \ldots \lambda_n)^{(m+i-s)}$ $s = 0, 1 \ldots m+i$ имеют аналогичное значение, с неравенствами

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_m)}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{n-mm})} \neq 0, \quad \frac{\partial(u_1 \ldots u_{m+i})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{n-m-i\,m+i})} \neq 0.$$

Уравнения (XI$_2$) могут иметь более одного решения, независимого от $u_1 \ldots u_{m+i-1}$, которое можно принять за u_{m+i}. Если функции $u_1 \ldots u_m$ удовлетворяют соотношениям (XI), если функции $u_1 \ldots u_{m+i-1}$ определяют функцию u_{m+i} многозначно, автор называет систему $m+1$ дифференциильных уравнений n-ого порядка

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}),\ u_i(x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}) = C_i \quad i = 1 \ldots m$$

$$\left(p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right)$$

системой в инволюции ранга $n-m$. Система в инволюции (II) имеет ранг один. Если $m = 1$, функция u_1 должна быть инвариантом дифференциального уравнения, соответствующим корню λ_1.

Если функции $u_1 \dots u_m$ удовлстворяют соотношениям (XI), если каждая функция u_{m+i} $(m+i \leqslant n)$ удовлетворяет соответствующей системе (XI_2), функции $u_1 \dots u_{n-1}$ удовлетворяют соотношениям (V). Этот способ определения их дает возможность обобщить некоторые теоремы из теории дифференциального уравнения второго порядка: если корни $\lambda_{k+1} \dots \lambda_l$ $(m < k+1 \leqslant l \leqslant n)$ неравны корням λ меньших индексов, если существуют инварианты $v_{k+1} \dots v_l$, им соответствующие, и если они заключают переменные $p_{n-11}, \dots p_{0n}$, их можно принять за функции $u_{k+1} \dots u_l$. Если в частности $m=1$, если корни $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ неравны между собой, если есть инварианты, им соответствующие, если они заключают переменные $p_{n-11} \dots p_{0n}$, их можно принять за функции $u_1 \dots u_{n-1}$. Система в инволюции

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10} \dots p_{0n}), \; v_i(x, y, z, p_{10} \dots p_{0n}) = C_i \quad i = 1 \dots n-1$$

имеет ранг один. Если все корни $\lambda_1 \dots \lambda_n$ неравны между собой, если $v_1 \dots v_n$ им соответствующие инварианты, их можно принять за функции $u_1 \dots u_n$. Данное дифференциальное уравнение (I) имеет только один полный интеграл, удовлетворяющий и дифференциальным уравнениям

$$v_i(x, y, z, p_{10} \dots p_{0n}) = C_i \qquad i = 1 \dots u.$$

Июнь, 1932.

ПОПРАВКИ

к статье Ц. К. Руссьяна «Intégration de l'équation aux dérivées partielles de l'ordre quelconque d'une fonction inconnue des deux variables indépendantes», ИМЕН, 1932, № 8, стр. 1029

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
1030	3	$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}$ $p_{01} \cdots p_{1n-1}, p_{0n})$	$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}$ $p_{01} \cdots p_{n-11} \cdots p_{0n})$
1031	10	$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01} \cdots p_{0n-1}, \cdots p_{0n})$	$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01} \cdots p_{n-11} \cdots p_{0n})$
1040	7	$u_n \cdots u_{n+1} \cdots u_N$	$u_n, u_{n+1} \cdots u_N$
1041	1	$n = 1$	$n - 1$
1049	2	u_{n-1}	u_{n+1}
1051	9 снизу	ordinaires est	ordinaires est étant
1052	1	du $x = x_0$	au $x = x_0$
1052	5	$x = x_0 + d - d_0$	$x = x_0 + \alpha - \alpha_0$
1052	6	d	α
1052	3 снизу	d	α
1061	8 снизу	$u_i(x, y, z, p_{10} \cdots p_{1n-1} \cdots p_{0n})$	$u_i(x, y, z, p_{10}, \cdots p_{n-11} \cdots p_{0n})$

Кроме того, на стр. 1052 строка 4-я сверху должна быть перенесена в строку 3-ю.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

И. П. НАТАНСОНА

(Представлено академиком **С. Н. Бернштейном)**

Пусть на интервале (a, b) задана положительная суммируемая функция

$$p(x) > 0 \tag{1}$$

В таком случае, как известно, можно построить (единственным способом) систему полиномов

$$\omega_0(x);\ \omega_1(x);\ \omega_2(x); \ldots \omega_k(x); \ldots \tag{2}$$

где $\omega_k(x)$ полином степени k, обладающую свойством:

$$\int_a^b p(x)\,\omega_k(x)\,\omega_l(x)\,dx = 0 \qquad (k \neq l) \tag{3}$$

$$\int_a^b p(x)\,\omega_k^2(x)\,dx = 1. \tag{4}$$

Эта система называется системой, ортогонально нормированной по весу $p(x)$.

Пусть $f(x)$ произвольная функция, определенная на интервале (a, b) и подчиненная единственному условию, чтобы произведение $p(x)\ f(x)$ было суммируемо.

Положим

$$c_k = \int_a^b p(x) f(x)\,\omega_k(x)\,dx \tag{5}$$

Если для некоторой точки x интервала (a, b) имеет место равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x), \tag{6}$$

то говорят, что $f(x)$ в точке x разлагается в ряд по полиномам (2).

В настоящей заметке мы устанавливаем следующий результат.

Любая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Lipschitz'а, почти во всех точках интервала (a, b) разлагается по полиномам (2).

Как известно, условие Lipschitz'а заключается в существовании такой константы M, что $|f(x'')-f(x')| \leq M|x''-x'|$ для любой пары точек x' и x'' интервала (a, b).

Для доказательства этого предложения установим предварительно следующую, почти очевидную, лемму.

Лемма. Пусть на интервале (a, b) дана последовательность положительных функций

$$f_1(x);\ f_2(x);\ f_3(x);\ \ldots f_n(x);\ \ldots$$

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

сходится, то почти для всех точек интервала (a, b) будет

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

Доказательство. Положим

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Как известно,

$$\int_a^b F(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

В силу конечности правой части этого равенства функция $F(x)$ суммируема, а значит почти везде конечна. Во всякой же точке, в которой $F(x)$ конечна, очевидно имеем

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0,$$

что и доказывает лемму.

Теперь мы можем перейти к доказательству формулированного выше результата.

Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Lipschitz'a.

По известной теореме существует такая константа A, что для любого n можно построить полином $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющий соотношению

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{A \lg n}{n}. \tag{7}$$

С другой стороны, если положить

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \omega_k(x), \tag{8}$$

где коэффициенты c_k определены по ф-ле (5), то, как известно, $S_n(x)$ есть полином, представляющий функцию $f(x)$ со средней квадратичной погрешностью [при весе $p(x)$], наименьшей по сравнению со всяким другим полиномом степени n.

В частности,

$$\int_a^b p(x)\,[f(x) - S_n(x)]^2\,dx \leq \int_a^b p(x)\,[f(x) - P_n(x)]^2\,dx, \tag{9}$$

что, на основании неравенства (7), дает

$$\int_a^b p(x)\,[f(x) - S_n(x)]^2\,dx \leq \frac{H \lg^2 n}{n^2}, \tag{10}$$

где H — некоторая численная константа.

Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b p(x)\,[f(x) - S_n(x)]^2\,dx$$

сходится и, в силу леммы, наше утверждение доказано.

Замечание I. Нетрудно видеть, что тот же результат справедлив для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Lipschitz'a с показателем α, если $\alpha > \frac{1}{2}$.

(Функция, удовлетворяет условию Lipschitz'а с показателем α, если $|S(x'') - S(x')| \leq M |x'' - x'|^{\alpha}$). Доказательство то же.

Замечание II. По самому характеру примененного метода доказательства мы могли установить сходимость разложения лишь *почти везде*. Интересно было бы выяснить, в какой мере это обстоятельство является следствием метода и не лежит ли оно в существе дела. Мы надеемся вернуться впоследствии к этому вопросу.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Оделение математических и естественных наук

О ДИНАМИКЕ ВЕСОВ. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОСТЫХ РЫЧАЖНЫХ ВЕСОВ

Ю. А. КРУТКОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Раньше чем строить теорию весов, принимая во внимание трение, сопротивление, упругость материала, следует, конечно, рассмотреть идеальный случай: трение и сопротивление отсутствуют, части весов — твердые тела. Этим идеальным случаем занимались: Эйлер в двух работах — в связи с известным явлением, открытым Даниилом Бернулли,[1] Stamkart,[2] Jullien,[3] Weinstein,[4] Routh.[5] Felgenträger в известной книге[6] приходит также к правильным уравнениям движения, но вывод их отнюдь не безупречен. Наконец диссертация H. Pflieger-Haertel'a,[7] на которую мне указал Ф. Я. Капустин, содержит тщательное, но несколько тяжеловесное исследование малых колебаний простых рычажных весов.

Когда дело идет о такой простой задаче, какая рассматривается здесь, то, конечно, нельзя надеяться получить что-либо новое. Можно, однако, пытаться упростить изложение и сделать его по возможности наглядным. Это и есть цель нашей статьи.

1 D. Bernoulli, Novi Commentarii Ac. Sc. Petropolitanae, 19, p. 260 (1774). — L. Euler, ibidem, pp. 302, 325.

2 F. J. Stamkart, Verhand. Kon. Nederl. Inst. (3) 1, p. 63 (1849). Эта работа была мне недоступна.

3 Jullien, Problèmes de Mécanique. T. II, p. 295.

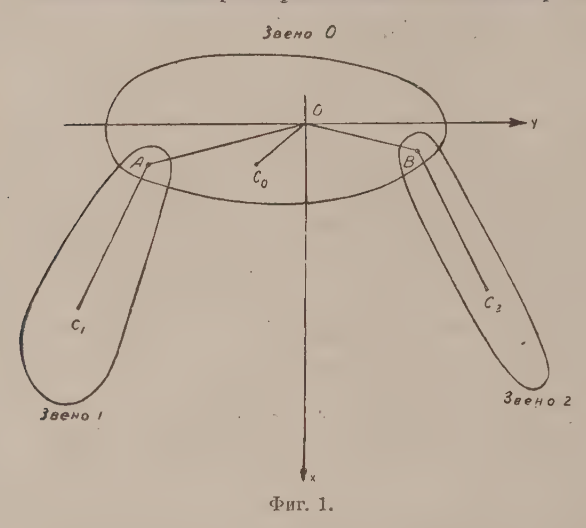
4 B. Weinstein, Handbuch d. phys. Massbestimmungen. Bd. II, p. 372.

5 E. J. Routh, Dynamics of a system of rigid bodies. Vol. II. Немецкого издания (Dynamik d. Systeme starrer Körper), p. 71.

6 W. Felgenträger, Theorie, Konstruktion u. Gebrauch d. feineren Hebelwage, p. 25.

7 H. Pflieger-Haertel, Ueber die kleinen Schwingungen einer dreigliedrigen ebenen Gelenkkette... Inaugural-Dissertation (Jena), 1914 (страниц 83). Наше изложение, начиная с § 5, довольно тесно примыкает к этой работе. В предисловии она содержит краткое изложение цитированных работ (pp. 7—12). Вышедшей в 1928 г. книги F. Zingler, Theorie d. zusammengesetzten Wagen (Springer, Berlin), я не видел.

§ **1.** Имеем систему трех твердых тел. Тело O (коромысло) может вращаться вокруг неподвижной оси и на своих концах несет две оси, вокруг коих могут вращаться тела 1 и 2 (чашки). Задача не только кинетически, но и кинетостатически будет плоской, если для каждого тела произведения инерции относительно оси вращения исчезают и, кроме того, все три плоскости симметрии, проведенные через соответственные центры инерции перпендикулярно к осям вращения, совпадают.[1] В дальнейшем эта общая плоскость симметрии принята за плоскость чертежа. Все три оси вращения параллельны, их пересечения с плоскостью чертежа суть O, A, B. Наша система есть плоская несвободная (точка O неподвижна) разветленная цепь из трех звеньев. Пусть C_0, C_1, C_2 центры инерции звеньев 0, 1, 2. Обозначим вектора $\overline{OC_0}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{BC_2}$ через $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$; вектора $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ через $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$; массы звеньев через m_0, m_1, m_2; момент инерции звена **O** относительно оси O через I_0, моменты инерции звеньев 1 и 2 относительно A и B соответственно через I_1 и I_2.



Фиг. 1.

Если $\mathbf{o}_0$, $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$ угловые скорости звеньев 0, 1, 2 относительно осей O, A, B, то скорость любой точки звена **O** представится так:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{o}_0 \times \mathbf{r}^{(0)}, \tag{1_0}$$

где $\mathbf{r}^{(0)}$ вектор, проведенный из O в рассматриваемую точку и $\times$ знак векторного умножения. Для скоростей точек звеньев 1 и 2 имеем

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_1 + \mathbf{o}_1 \times \mathbf{r}^{(1)} \tag{1_1}$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_2 + \mathbf{o}_2 \times \mathbf{r}^{(2)}, \tag{1_2}$$

где $\mathbf{r}^{(1)}$ и $\mathbf{r}^{(2)}$ вектора $\mathbf{o}_2$, проведенные из A и B в рассматриваемые точки звеньев 1 и 2. Умножив каждую скорость на соответственный элемент массы

[1] См. напр., K. Heun, Enc. d. math. Wiss. IV, 1 II, § 4b, p. 382.

и просуммировав по всем элементам соответственного звена, получим для количеств движения звеньев

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= m_0\,\mathbf{o}_0 \times \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{V}_1 &= m_1(\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_1 + \mathbf{o}_1 \times \mathbf{r}_1) \\ \mathbf{V}_2 &= m_2(\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_2 + \mathbf{o}_2 \times \mathbf{r}_2) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Полное количество движения $\mathbf{V}$ очевидно равно

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2. \qquad (2')$$

Вычисляем теперь моменты количеств движения: $\mathbf{H}_0$ для звена 0 относительно O, $\mathbf{H}_1$ для звена 1 относительно A, $\mathbf{H}_2$ для звена 2 относительно B:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= I_0\,\mathbf{o}_0 \\ \mathbf{H}_1 &= m_1\,\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_1) + I_1\,\mathbf{o}_1 \\ \mathbf{H}_2 &= m_2\,\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_2) + I_2\,\mathbf{o}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Полный момент количеств движения $\mathbf{H}$ относительно O очевидно равен

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{V}_1 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{V}_2. \qquad (3')$$

§ **2.** Переходим теперь к дифференциальным уравнениям движения.

Обозначим через $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ главные векторы сил, действующих на звенья 0, 1, 2 (в дальнейшем это будет сила тяжести), через $\mathbf{R}_0$ реакцию в точке O, через $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ реакции в A и B, действующие на звено 0. Тогда, обозначая точкой производную по времени, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_0 &= \mathbf{F}_0 + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B \\ \dot{\mathbf{V}}_1 &= \mathbf{F}_1 - \mathbf{R}_A \\ \dot{\mathbf{V}}_2 &= \mathbf{F}_2 - \mathbf{R}_B \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

и кроме того

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_0. \qquad (4')$$

Далее имеем:

$$\dot{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{L}_0 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_A + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_B, \qquad (5_0)$$

где $\mathbf{L}_0$ момент сил, приложенных к звену 0, относительно точки O.

Чтобы исключить отсюда моменты реакций, пользуемся вторым и третьим уравнениями (4). Имеем:

$$\dot{\mathbf{H}}_0 + \mathbf{l}_1 \times \dot{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{l}_2 \times \dot{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{L}_0 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{F}_2. \qquad (5_0')$$

Для звеньев 1 и 2 получаем ($\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ взяты относительно точек A и B):

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_1 + (\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_1) \times \mathbf{V}_1 = \mathbf{L}_1 \\ \dot{\mathbf{H}}_2 + (\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_2) \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{L}_2, \end{aligned}\right\} \qquad (5_{1,2})$$

где $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ моменты сил (относительно точек A и B), приложенных к звеньям 1 и 2. Наконец для $\mathbf{H}$ имеем:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{F}_2. \qquad (5')$$

Из выписанных уравнений (4) и (5) нам нужно шесть: три (наша система имеет три степени свободы) дифференциальных уравнения движения, не содержащих реакций, и три — для определения этих реакций. Для последней цели служат два последних уравнения (4) и уравнение (4').

Из них получаем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \dot{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{R}_A &= \mathbf{F}_1 - \dot{\mathbf{V}}_1 \\ \mathbf{R}_B &= \mathbf{F}_2 - \dot{\mathbf{V}}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

Дифференциальные уравнения движения $(5_0')$, $(5_{1,2})$, не содержащие реакций, переписываем еще раз:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathbf{H}}_0 + \mathbf{l}_1 \times \dot{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{l}_2 \times \dot{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{L}_0 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{F}_2 \\ &\dot{\mathbf{H}}_1 + (\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_1) \times \mathbf{V}_1 = \mathbf{L}_1 \\ &\dot{\mathbf{H}}_2 + (\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_2) \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{L}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II})$$

§ **3.** Займемся уравнениями (II). Обозначим массу всех звеньев через m:

$$m = m_0 + m_1 + m_2.$$

Введем далее три плеча инерции $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и три вектора $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, определяемые так:

$$\left.\begin{aligned} m\varkappa_0^2 &= I_0 + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \\ m\varkappa_1^2 &= I_1 \\ m\varkappa_2^2 &= I_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

и

$$\left.\begin{aligned} m\mathbf{a}_0 &= m_0\mathbf{r}_0 + m_1\mathbf{l}_1 + m_2\mathbf{l}_2 \\ m\mathbf{a}_1 &= m_1\mathbf{r}_1 \\ m\mathbf{a}_2 &= m_2\mathbf{r}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Кроме того, обозначим через $\mathbf{c}$ единичный вектор, перпендикулярный к плоскости симметрии системы, принятой за плоскость чертежа (фиг. 1). Тогда

$$\mathbf{o}_0 = \omega_0\mathbf{c}, \quad \mathbf{o}_1 = \omega_1\mathbf{c}, \quad \mathbf{o}_2 = \omega_2\mathbf{c}. \qquad (8)$$

Подставляем в первое уравнение (II) вместо $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ их значения (3), (2):

$$I_0\dot{\mathbf{o}}_0 + m_1\mathbf{l}_1 \times \frac{d}{dt}[\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_1 + \mathbf{o}_1 \times \mathbf{r}_1] +$$
$$+ m_2\mathbf{l}_2 \times \frac{d}{dt}[\mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_2 + \mathbf{o}_2 \times \mathbf{r}_2] = \mathbf{L}_0 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{F}_2.$$

После простой выкладки, где следует только применить формулы:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{l}}_i &= \mathbf{o}_0 \times \mathbf{l}_i \\ \dot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{o}_i \times \mathbf{r}_i \end{aligned}\right\} (i = 1,\ 2)$$

и формулу для тройного векторного произведения:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}),$$

где точка знак скалярного умножения, получаем для левой части:

$$(I_0 + m_1\mathbf{l}_1^2 + m_2\mathbf{l}_2^2)\dot{\mathbf{o}}_0 + m_1(\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_1)\dot{\mathbf{o}}_1 + m_2(\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_2)\dot{\mathbf{o}}_2 -$$
$$- m_1\mathbf{o}_1^2\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{o}_2^2\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_2.$$

Пусть силы, приложенные к звеньям, суть силы тяжести:

$$\mathbf{F}_0 = m_0\mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{g}, \qquad (9)$$

где $\mathbf{g}$ вектор ускорения силы тяжести. Тогда, очевидно, имеем:

$$\mathbf{L}_0 = m_0 \mathbf{r}_0 \times \mathbf{g}, \quad \mathbf{L}_1 = m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{g}, \quad \mathbf{L}_2 = m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{g} \tag{10}$$

и правая часть уравнения может быть переписана так:

$$\mathbf{L}_0 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{F}_2 = (m_0 \mathbf{r}_0 + m_1 \mathbf{l}_1 + m_2 \mathbf{l}_2) \times \mathbf{g} = m\mathbf{a}_0 \times \mathbf{g}.$$

Вводя обозначения (6), (7), (8) и в левую часть уравнения, получаем окончательно, сократив на m:

$$[\varkappa_0^2 \dot{\omega}_0 + (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\dot{\omega}_1 + (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\dot{\omega}_2]\mathbf{c} - \omega_1^2 \mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_1 - \omega_2^2 \mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{g}. \tag{II$_0$}$$

Аналогичные выкладки для двух других уравнений (II) дают соответственно:

$$\left.\begin{array}{l} [\varkappa_1^2 \dot{\omega}_1 + (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\dot{\omega}_0]\mathbf{c} + \omega_0^2 \mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{g} \\ [\varkappa_2^2 \dot{\omega}_2 + (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\dot{\omega}_0]\mathbf{c} + \omega_0^2 \mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{g}. \end{array}\right\} \tag{II$_{1,2}$}$$

Условимся направить единичный вектор $\mathbf{c}$ из плоскости чертежа вперед (на нас), если вращение происходит против часовой стрелки.

Тогда следует положить:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_1 = |\mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_1|\mathbf{c}, \quad \mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_2 = -|\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_2|\mathbf{c}, \\ \mathbf{a}_0 \times \mathbf{g} = -|\mathbf{a}_0 \times \mathbf{g}|\mathbf{c} \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{g} = -|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{g}|\mathbf{c}, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{g} = -|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{g}|\mathbf{c}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Уравнения (II$_{0,1,2}$) приобретают вид:

$$\left.\boxed{\begin{array}{lllll} \varkappa_0^2 \dot{\omega}_0 + (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\dot{\omega}_1 + (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\dot{\omega}_2 & - |\mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_1|\omega_1^2 + |\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_2|\omega_2^2 & = -|\mathbf{a}_0 \times \mathbf{g}| \\ \varkappa_1^2 \dot{\omega}_1 + (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\dot{\omega}_0 & + |\mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_1|\omega_0^2 & = -|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{g}| \\ \varkappa_2^2 \dot{\omega}_2 \quad + (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\dot{\omega}_0 & - |\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_2|\omega_0^2 & = -|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{g}| \end{array}}\right\} \tag{*}$$

При равновесии должны исчезать правые части, т. е. вектора $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ должны быть параллельны вектору $\mathbf{g}$. Если кроме того

$$\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{g} > 0, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{g} > 0, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{g} > 0,$$

т. е. вектора $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ направлены вниз, то равновесие устойчиво. Вектор $\mathbf{a}_0$ может быть истолкован как вектор, проведенный из O к центру тяжести системы, состоящей из звена 0 и двух точечных масс m_1 и m_2 в точках A

и B. Следовательно, центр тяжести этой приведенной системы при устойчивом равновесии должен лежать на вертикали под O (и одновременно центры инерции звеньев 1 и 2 на вертикалях под A и B).

$m\varkappa_0^2$ есть моменты инерции приведенной системы относительно оси O, $m\varkappa_1^2$ и $m\varkappa_2^2$ — моменты инерции звеньев 1, 2 относительно A и B.

§ 4. Пусть система совершает малые колебания. Тогда в уравнениях (*) нужно отбросить члены, содержащие квадраты угловых скоростей:

$$\left.\begin{aligned}\varkappa_0^2\dot{\omega}_0+(\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{a}_1)\dot{\omega}_1+(\mathbf{l}_2\cdot\mathbf{a}_2)\dot{\omega}_2&=-|\mathbf{a}_0\times\mathbf{g}|\\(\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{a}_1)\dot{\omega}_0+\varkappa_1^2\dot{\omega}_1&=-|\mathbf{a}_1\times\mathbf{g}|\\(\mathbf{l}_2\cdot\mathbf{a}_2)\dot{\omega}_0+\varkappa_2^2\dot{\omega}_2&=-|\mathbf{a}_2\times\mathbf{g}|\end{aligned}\right\}$$

Обозначим через φ_0, φ_1, φ_2 (малые) углы между вертикалью и векторами $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Отсчитываем эти углы от оси x-ов направо (см. фиг. 1). Пусть α_1 и α_2 углы между $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{l}_2$ и $\mathbf{a}_2$ в положении равновесия. Тогда, очевидно, вплоть до величин первого порядка малости

$$\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{a}_1=l_1a_1\cos\alpha_1,\quad \mathbf{l}_2\cdot\mathbf{a}_2=l_2a_2\cos\alpha_2,$$

далее — вплоть до величин порядка малости выше первого:

$$|\mathbf{a}_0\times\mathbf{g}|=a_0g\varphi_0,\quad |\mathbf{a}_1\times\mathbf{g}|=a_1g\varphi_1,\quad |\mathbf{a}_2\times\mathbf{g}|=a_2g\varphi_2$$

и кроме того:

$$\dot{\omega}_0=\ddot{\varphi}_0,\quad \dot{\omega}_1=\ddot{\varphi}_1,\quad \dot{\omega}_2=\ddot{\varphi}_2$$

Уравнения движения приобретают вид:

$$\left.\begin{aligned}\varkappa_0^2\ddot{\varphi}_0+l_1a_1\cos\alpha_1\ddot{\varphi}_1+l_2a_2\cos\alpha_2\ddot{\varphi}_2+a_0g\varphi_0&=0\\l_1a_1\cos\alpha_1\ddot{\varphi}_0+\varkappa_1^2\ddot{\varphi}_1+a_1g\varphi_1&=0\\l_2a_2\cos\alpha_2\ddot{\varphi}_0+\varkappa_2^2\ddot{\varphi}_2+a_2g\varphi_2&=0\end{aligned}\right\}\qquad (**)$$

Эти уравнения мы легко могли бы получить сразу — как Лагранжевы уравнения второго ряда. Если мы предпочли итти более длинным путем, то потому, чтобы иметь готовым удобный метод для сложных весов, а также ради уравнений (I), дающих реакции.

Если $\cos\alpha_1=0$ и $\cos\alpha_2=0$, т. е. если O, A, B в положении равновесия лежат на одной горизонтальной прямой, то система (**) распадается

на три уравнения, и движение состоит из простых гармонических колебаний с частотами (числами колебаний в 2π секунд)

$$\left.\begin{aligned} &\text{для коромысла: } n_0 = \sqrt{\frac{a_0 g}{\varkappa_0^2}} \\ &\text{для чашек: } \begin{cases} n_1 = \sqrt{\dfrac{a_1 g}{\varkappa_1^2}} \\ n_2 = \sqrt{\dfrac{a_2 g}{\varkappa_2^2}} \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Колебания звеньев 1 и 2 не влияют на движение звена 0, которое колеблется с периодом приведенной системы.

§ **5.** Таким образом, у идеальных весов, у которых все три оси (все три ножа) лежат в положении равновесия в одной горизонтальной плоскости, колебание коромысла совершенно не зависит от колебаний чашек. Если наблюдается такая зависимость, то она может происходить от следующих причин:

(1) изгиб коромысла от нагрузок на чашках;

(2) точки O, A, B лежат на прямой, но эта прямая в положении равновесия не горизонтальна, а расположена косо, что может происходить от

(а) неравномерного распределения массы в коромысле,

(б) неравноплечности весов,

(в) неравных весов звеньев 1 и 2.

§ **6.** Рассмотрим случай (1) — изгиб коромысла.

Мы можем положить:

$$\varkappa_1^2 = \varkappa_2^2 = \varkappa^2, \quad a_1 = a_2 = a,$$

т. е. считать звенья 1 и 2 тождественными. Положим далее

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \chi, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \chi,$$

где χ угол между вектором $\mathbf{l}_i (i = 1, 2)$ и горизонталью. Кроме того положим

$$l_1 = l_2 = l.$$

Тогда уравнения (**) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa_0^2 \ddot{\varphi}_0 + la \sin\chi\,(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + ga_0 \varphi_0 = 0 \\ &la \sin\chi \ddot{\varphi}_0 + \varkappa^2 \ddot{\varphi}_1 \qquad\qquad + ga\ \varphi_1 = 0 \\ &la \sin\chi \ddot{\varphi}_0 \qquad\qquad + \varkappa^2 \ddot{\varphi}_2 + ga\ \varphi_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Если угол χ мал, так что можно заменить $\sin\chi$ на χ, то члены, содержащие χ, будут второго порядка малости, и колебания останутся независимыми. Поэтому предположим, что этого нет, но будем считать, что коэффициент $la\sin\chi$ значительно меньше остальных.

Вычитая из второго уравнения третье получаем:

$$\varkappa^2(\ddot{\varphi}_1-\ddot{\varphi}_2)+ga(\varphi_1-\varphi_2)=0,$$

т. е.

$$\varphi_1-\varphi_2=C_1\cos nt+C_2\sin nt,$$

где

$$n^2=\frac{ga}{\varkappa^2}.$$

Складывая те же уравнения, получаем:

$$\varkappa^2(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)+ga(\varphi_1+\varphi_2)+2la\sin\chi\ddot{\varphi}_0=0;$$

присоединяем первое уравнение:

$$\varkappa_0^2\ddot{\varphi}_0+ga_0\varphi_0+la\sin\chi(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)=0.$$

В эти два уравнения входят только две зависимые переменные: φ_0 и $\varphi_1+\varphi_2$. Отсюда заключаем, что для коромысла получатся только две частоты. Таким образом, движение коромысла слагается из двух гармонических колебаний. Если вычеркнуть члены, содержащие $\sin\chi$, то для φ_0 приближенно имеем частоту $\sqrt{ga_0}/\varkappa_0$, для $\varphi_1+\varphi_2$ — частоту $\sqrt{ga_1}/\varkappa$. Обычно для весов вторая частота значительно больше первой. Можно при помощи грубого приближения убедиться, что амплитуда колебания большой частоты порядка $\sin\chi$, т. е. мала. Действительно: вычеркиваем в первом уравнении член с $\sin\chi$, тогда $\varphi_1+\varphi_2$, а следовательно и $\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2$, простые гармонические функции времени с частотой $\sqrt{ag}/\varkappa$. Подставляем выражение для $\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2$ во второе уравнение. Тогда для φ_0 получаем «свободные» колебания с частотой $\sqrt{a_0 g}/\varkappa_0$ и «вынужденные» с частотой $\sqrt{ag}/\varkappa$ и амплитудой, пропорциональной $la\sin\chi$, т. е. малой. Таким образом, движение коромысла следующее: оно совершает быстрое колебание (частота близка к $\sqrt{ag}/\varkappa$) с малой амплитудой вокруг среднего положения, которое в свою очередь колеблется вокруг положения равновесия с малой частотой, близкой к $\sqrt{ag_0}/\varkappa$.

§ 7. Рассмотрим теперь случай (2а) — неравномерное распределение массы коромысла (§ 5). В положении равновесия оно стоит косо. Полагаем по прежнему звенья 1 и 2 тождественными и $l_1=l_2$. Положим коромысло наклоненным налево для наблюдателя на угол χ. Тогда очевидно

$$\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\chi,\quad \alpha_2=\frac{\pi}{2}+\chi$$

Уравнения движения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_0^2\ddot{\varphi}_0 + la\sin\chi(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + ga_0\varphi_0 &= 0 \\ la\sin\chi\ddot{\varphi}_0 + \varkappa^2\ddot{\varphi}_1 + ga\varphi_1 &= 0 \\ -la\sin\chi\ddot{\varphi}_0 + \varkappa^2\ddot{\varphi}_2 + ga\varphi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Складывая последние два уравнения, получаем:

$$\varkappa^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + ga(\varphi_1 + \varphi_2) = 0,$$

т. е. $\varphi_1 + \varphi_2$ совершает колебания с частотой $\sqrt{ag}/\varkappa$. Вычитая эти уравнения, получаем:

$$\varkappa^2(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + ga(\varphi_1 - \varphi_2) + 2la\sin\chi\ddot{\varphi}_0 = 0;$$

кроме того

$$\varkappa_0^2\ddot{\varphi}_0 + ga_0\varphi_0 + la\sin\chi(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = 0.$$

Сравнивая эти уравнения с таковыми предыдущего параграфа, видим: они отличаются от них только тем, что на место $\varphi_1 + \varphi_2$ стало $\varphi_1 - \varphi_2$. Таким образом, все выводы предыдущего параграфа годятся и здесь.

§ 8. Переходим теперь к случаю (2б) — неравноплечность коромысла (§ 5). Полагаем по прежнему звенья 1 и 2 тождественными; но l_1 теперь не равно l_2, пусть

$$l_1 = l_2 + \lambda = l + \lambda.$$

Мы снова имеем косое положение коромысла в положении равновесия:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \chi, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \chi.$$

Уравнения движения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_0^2\ddot{\varphi}_0 + la\sin\chi(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \lambda a\sin\chi\ddot{\varphi}_1 + ga_0\varphi_0 &= 0 \\ (l+\lambda)a\sin\chi\ddot{\varphi}_0 + \varkappa^2\ddot{\varphi}_1 + ga\varphi_1 &= 0 \\ -la\sin\chi\ddot{\varphi}_0 + \varkappa^2\ddot{\varphi}_2 + ga\varphi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Складывая последние два уравнения, получаем:

$$\varkappa^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + ga(\varphi_1 + \varphi_2) + \lambda a\sin\chi\ddot{\varphi}_0 = 0.$$

Вычитаем из второго третье:

$$\varkappa^2(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + ga(\varphi_1 - \varphi_2) + (2l + \lambda)\, a \sin\chi \ddot{\varphi}_0 = 0.$$

Переписываем еще раз первое уравнение:

$$\varkappa_0^2 \ddot{\varphi}_0 + ga_0 \varphi_0 + la \sin\chi (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \lambda a \sin\chi \frac{(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2)}{2} = 0.$$

Нам нет надобности подробно разбираться в системе этих трех уравнений: грубое приближенное рассмотрение дает нам все, что нужно. В первом из полученных уравнений вычеркиваем последний член, содержащий как λ, так и $\sin\chi$. Тогда приближенно для $\varphi_1 + \varphi_2$, а следовательно и для $\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2$, получаем простое гармоническое колебание с частотой (приближенной) $\sqrt{ga}/\varkappa$. Если подставить это выражение для $\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2$ в последнее уравнение и перенести эту функцию времени направо, то получим два уравнения — второе и последнее, — схожие с соответствующими уравнениями предыдущего параграфа. Для «свободных» колебаний получим частоты, близкие к $\sqrt{ga_0}/x_0$ и к $\sqrt{ga}/\varkappa$. Амплитуда колебаний коромысла для последней частоты значительно меньше, чем амплитуда колебаний частоты $\sqrt{ga_0}/\varkappa_0$. К этим колебаниям прибавится третье, с частотой тоже близкой к $\sqrt{ga}/\varkappa$, при нашем способе вычислений — вынужденное, с амплитудой, пропорциональной $\lambda \sin\chi$, т. е. также незначительной. Для обычных весов частота, близкая к частоте приведенной системе $\sqrt{ga_0}/\varkappa_0$, значительно меньше двух других частот, эти же близки друг к другу. Таким образом, движение коромысла имеет следующий вид: оно совершает простое гармоническое колебание с длинным периодом, на которое налагаются биения незначительной амплитуды, происходящие от наложения двух других колебаний с близкими частотами. Коромысло «дергается».

Случай (2в) — неравные веса звеньев 1, 2 — с принципиальной стороны не отличается от предыдущего. Результат прежний.

Существенным в этом кратком исследовании нужно признать следующее:

1) картина качаний коромысла, как она наблюдается, качественно вполне объясняется (см. конец § 6 и этого) теорией малых колебаний весов (без трения и сопротивления среды), т. е. не принимая во внимание членов типа центробежной силы (содержащих квадраты угловых скоростей);

2) если угол χ так же мал, как и углы φ_0, φ_1, φ_2, то колебания чашек не возмущают колебания коромысла.

§ **9.** Не представляет труда довести задачу интегрирования уравнений в общем случае, т. е. уравнений (**), до конца. Для определения частот придется решить уравнение 3-й степени, что, конечно, если постоянные нашей системы численно заданы, не представляет труда. Для определения амплитуд придется решить три системы из трех линейных однородных уравнений; чтобы ввести начальные данные — значения φ_0, φ_1, φ_2 и $\dot\varphi_0$, $\dot\varphi_1$, $\dot\varphi_2$ для $t=0$ — придется снова решать системы линейных уравнений. Последние два этапа можно соединить в один и тем сократить работу, пользуясь методой Коши — интегральных вычетов — или эквивалентной ей операциональной методой Heaviside'а. Однако, полное решение задачи излишне, так как нам в действительности начальное состояние движения весов неизвестно. Поэтому в заключение дадим только приближенные — при некоторых предположениях, охватывающих все рассмотренные частные случаи — значения частот. Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{ga_0}{\varkappa_0^2}=n_0^2, \quad \frac{ga_1}{\varkappa_1^2}=n_1^2, \quad \frac{ga_2}{\varkappa_2^2}=n_2^2 \\ &\frac{(l_1 a_1 \cos\alpha_1)^2}{\varkappa_0^2\varkappa_1^2}=\varepsilon_1, \quad \frac{(l_2 a_2 \cos\alpha_2)^2}{\varkappa_0^2\varkappa_2^2}=\varepsilon_2, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где n_0 частота приведенной системы, n_1, n_2 частоты чашек, когда колебания независимы; ε_1, ε_2 — постоянные, характеризующие связь между колебаниями. Об ε_1 и ε_2 предположим, что они первого порядка малости. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\omega)=(n_0^2-\omega^2)(n_1^2-\omega^2)(n_2^2-\omega^2)-& \\ -\varepsilon_1\omega^2(n_2^2-\omega^2)-\varepsilon_2\omega^2(n_1^2-\omega^2)=0.& \end{aligned} \tag{17}$$

Полагая

$$\omega_0^2=n_0^2+N_0, \quad \omega_1^2=n_1^2+N_1, \quad \omega_2^2=n_2^2+N_2,$$

где N_0, N_1, N_2 первого порядка малости, легко получаем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0&=n_0\left(1-\frac{\varepsilon_1}{2(n_1^2-n_0^2)}-\frac{\varepsilon_2}{2(n_2^2-n_0^2)}\right) \\ \omega_1&=n_1\left(1+\frac{\varepsilon_1}{2(n_1^2-n_0^2)}\right) \\ \omega_2&=n_2\left(1+\frac{\varepsilon_2}{2(n_2^2-n_0^2)}\right) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ХИМИЗМА ТРАХИТОВ

Ф. Ю. ЛЕВИНСОНА-ЛЕССИНГА

Химическая характеристика изверженных пород, принятая мною, т. е. магматическая формула, коэфициент кислотности и отношение между щелочами и щелочными землями, была уже предметом статистической обработки для базальтов, андезитов, дацитов и липаритов.[1] В настоящей статье сообщаю результаты обработки этим же путем трахитовых лав. Материалом послужили анализы трахитов в сборнике Вашингтона.[2] Под названием «трахит» разные авторы описывали не только настоящие трахиты, но и кварцевые трахиты и разные переходные типы. Отбросив несколько анализов, заведомо не трахитовых, пришлось взять в обработку всю совокупность остальных анализов, которые в сборнике Вашингтона значатся трахитами.

Вычисление магматических характеристик и квадратичного отклонения (σ) для α и R произведено Э. А. Струве.

Уже при первом взгляде на анализы привлекает к себе внимание большой диапазон содержания кремнекислоты. Ясно, что эти 210 анализов обнимают не только трахиты, но и кислые породы трахитового ряда. Обзор коэфициентов кислотности и статистическая их обработка показывают, что в этих 210 анализах действительно есть две группы пород, из которых только одна может быть рассматриваема как трахиты в тесном смысле слова.

I. По величине коэфициента кислотности анализы распределяются следующим образом (табл. 1):

[1] Ф. Ю. Левинсон-Лессинг. О пределах и подразделениях семейства андезитов. Изв. Геол. Ком., XLIII, 1924, 723; он же. О разграничении базальтов и андезитов. Изв. Геол. Ком.; F. Loewinson-Lessing. On the delimitation of dacites and liparites. Доклады АН, сер. А, 1930, стр. 179.

[2] H. Washington. Chemical analyses of igneous rocks. U. S. G. S. Prof. Pap., № 99, 1917.

Таблица I

Величина коэфиц. α .	1.81—1.90	1.91—2.0	2.01—2.10	2.11—2.20	2.21—2.30	2.31—2.40
Число анализов . .	5	3	11	12	19	12
			23		31	
Величина коэфиц. α .	2.41—2.50	2.51—2.60	2.61—2.70	2.71—2.80	2.81—2.90	2.91—3.00
Число анализов . . .	21	18	14	19	22	13
	39		33		36	
Величина коэфиц. α .	3.01—3.10	3.11—3.20	3.21—3.30	3.31—3.40	3.41—3.50	
Число анализов . .	19	7	7	6	2	

Настоящие трахиты обнимают группы от 2.21 до 2.70; средний коэфициент кислотности для этих 84 анализов вычисляется так, если за центральный, иначе нулевой, класс принять класс с α от 2.41 до 2.50:

Классы	2	1	0	1	2
Число анализов . .	19	12	21	18	14
		—12		+18	
		—38		+28	
		—50		+46	

$n = 84$

$$b = \frac{-4}{84} = -0.05$$

A = 2.45
M = 2.40

Этот средний коэфициент кислотности близок к тем, которые были определены мною дважды: первоначально 2.47 (из 15 анализов),[1] затем 2.48 (из 48 анализов, среди которых, очевидно, были и кварцевые трахиты).[2]

Анализы трахитов с повышенным содержанием кремнекислоты и с коэфициентом кислотности выше 2.70, т. е. заведомо кислых лав, дают две

[1] Ф. Ю. Левинсон-Лессинг. Исследования по теоретической петрографии. 1898.

[2] Ф. Ю. Левинсон-Лессинг. Магматические формулы по новым средним. Геол. вестн., 1922, стр. 8.

группы: одна соответствует максимуму от 2.81 до 2.90 (1), вторая от 3.01 до 3.10.

(2.855)

I. Классы	1	0	1	$\Big\} n = 54$
Число анализов . .	19	22	13	
	—19		+13	

$$b = \frac{-6}{54} = -0.11$$

A = 2.86

M = 2.75

(2.855)

Ia. Классы	2	1	0	1	2	$\Big\} n = 87$
Число анализов . .	14	19	22	13	19	
		—18		+13		
		—28		+38		
		—56		+51		

$$b = \frac{-5}{87} = -0.057$$

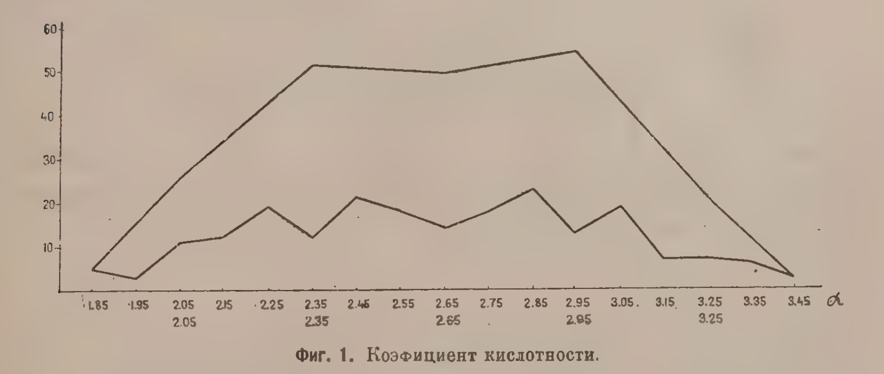
A = 2.855

M = 2.80

II. α = 3.01 до 3.10

M = 3.05.

Обе эти группы принадлежат к переходной ветви от трахитов к дацитам, т. е. к трахидацитам.

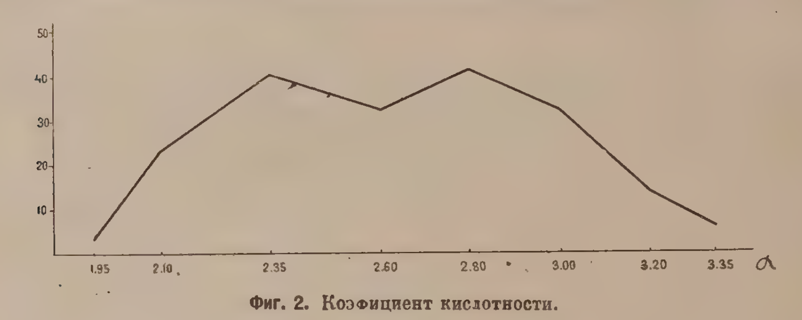


Фиг. 1. Коэфициент кислотности.

Разнородность анализов, значащихся трахитами, можно наглядно обнаружить при помощи диаграммы, на которой абсциссы дают величину коэфициента кислотности, а ординаты число соответствующих анализов.

На диаграмме (фиг. 1 и 2) ясно выступает четыре максимума: два для кислых трахитов и два для нормальных трахитов. Первые два максимума нашли себе отражение в наших вычислениях; последние два объединены

в одну группу вместе с разделяющим их небольшим относительным максимумом. Если брать асциссы не через 0.1, а через 0.2, то остается всего два максимума: один для настоящих трахитов и один для кислых. Если рассматривать эти две группы трахитов раздельно, то можно сказать, что среди трахитов преобладают и встречаются почти одинаково часто лавы с коэфициентом кислотности от 2.21 до 2.30, в среднем 2.25, и лавы с коэфициентом кислотности от 2.41—2.50, в среднем 2.45; сравнительно реже встречаются лавы с коэфициентом кислотности от 2.31 до 2.40.



Фиг. 2. Коэфициент кислотности.

Пределы колебаний для коэфициента кислотности дают следующую картину (σ обозначает квадратное отклонение):

1) Для окситрахитов с $\alpha = 2.75$ . . . . $\sigma = 0.121$, т. е. $2.87 > \alpha > 2.63$
2) Для окситрахитов с $\alpha = 2.91$ . . . . $\sigma = 0.145$, т. е. $3.05 > \alpha > 2.76$
3) Для окситрахитов с $\alpha = 3.05$ . . . . $\sigma = 0.033$, т. е. $3.08 > \alpha > 3.02$
4) Для нормальных трахитов с $\alpha = 2.40$. $\sigma = 0.148$, т. е. $2.55 > \alpha > 2.25$
т. е. $2.55 > \alpha$ 2,25 или, если взять 2, то σ $2.70 > \alpha > 2.10$.

II. Обратимся теперь ко второй характерной для химического облика трахитов величине, к коэфициенту при $\overline{RO}$ в магматической формуле, который мы для краткости обозначаем через R. По классам наши анализы распределяются следующим образом (табл. 2):

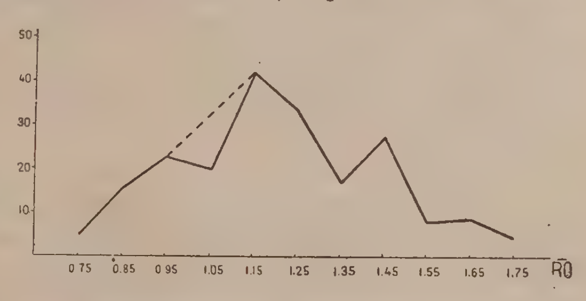
Таблица 2

Величина R . .	0.51—0.60	0.61—0.70	0.71—0.80	0.81—0.90	0.91—1.00	1.01—1.10
Число анализов .	1	1	5	16	23	20
Величина R . .	1.11—1.20	1.21—1.30	1.31—1.40	1.41—1.50	1.51—1.60	1.61—1.70
Число анализов .	42	34	17	28	7	9

(*Продолжение*)

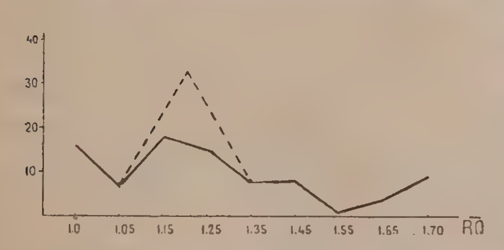
Величина R .	1.71—1.80	1.81—1.90	1.91—2.00	2.01—2.10	2.11—2.20	2.21—2.30
Число анализов .	5	2	2	4	—	1
Величина R .	2.31—2.40	2.41—2.50	2.51—2.60	2.71—2.80	2.91—3.00	3.31—3.40
Число анализов .	—	—	1	2	1	1

И на этой таблице и на диаграмме (фиг. 3) ясно вырисовывается главный максимум, соответствующий R от 1.11 до 1.20, в среднем 1.155; второй максимум приходится на 1.41 до 1.50; что касается третьего максимума (0.91—1.00), то его, быть может, можно игнорировать, и мы на диаграмме это и отметили пунктиром; этот максимум очень незначителен по сравнению с соседним классом, и возможно, что он получился лишь вследствие того, что разграничение анализов с R от 0.99—1.00 довольно искусственно.



Фиг. 3. Коэфициент при $\overline{R}O$ в магматической формуле.

Величина R, как показывает таблица 2, очень разнообразна и неопределенна. Поэтому и вычисление средней величины и отклонений от нее представляют затруднения. Среднее для наиболее многочисленного класса 1.155 меньше той средней, которая была мною дана раньше (1.27 и 1.25); а если взять поправку на классы от 0.81 до 1.50, то получается слишком большая величина 1.366. Это зависит, конечно, от того обстоятельства, что в общее число анализов (222) попали не только трахиты, но и другие породы, примыкающие к трахитам. Поэтому более целесообразно выделить ту группу



Фиг. 4. Коэфициент при $\overline{R}O$ у центральной группы трахимов с α от 2.20 до 2.70.

пород, которая по величине коэфицента кислотности может быть рассматриваема как настоящие трахиты (и отчасти кислые трахиты). Это лавы с коэфициентом кислотности от 2.21 до 2.70.

В таблице 2 дана величина R всей совокупности анализов, помещенных в сборнике Вашингтона под названием трахитов. Но нас в первую очередь интересуют настоящие трахиты, т. е. те, у которых коэфициент кислотности находится в пределах от 2.21 до 2.70; эти анализы сгруппированы на таблице 3.

Таблица 3

Величина R	1 < 1.01	2 1.01—1.10	3 1.11—1.20	4 1.21—1.30	5 1.31—1.40
Число анализов	16	7	18	15	8
Величина R	6 1.41—1.50	7 1.51—1.60	8 1.61—1.70	9 1.70	
Число анализов	8	1	3	9	

Величина R у центральной группы трахитов (классы 3 и 4), составляющей 39% всех анализов, 1.205, или 1.20; первоначально у меня было 1.25, а затем 1.27. Но величина R, вообше говоря, довольно разнообразна, как видно из нижеследующего сопоставления:

Класс 3-й	1.155	т. е.	21.1%
» 4-й	1.255	»	17.7
» 3-й + 4-й	1.205	»	39
» 5-й до 8 вкл.	1.505	»	24
» 9-й	2.03	»	10
» 2-й	1.055	»	8
» 1-й	0.87	»	19

Для всей совокупности трахитов, всего 180 анализов (от 0.91 до 1.50, так как некоторые исключительные типы пришлось отбросить), среднее значение для R получилось 1.366, т. е. 1.37 по следующему расчету:

Классы	3	2	1	0	1	2	3	
Число анализов	16	23	20	(42)	34	17	28	$n = 180$
					+34	+34	+84	
					−20	−46	−48	
					+14	−12	+36	$b = +38$

Средняя для центрального класса . . . $A = 1.155$

Поправка . . . . $b = \frac{38}{180} = 0.211$

Средняя для всех . . . . $M = 1.366$

До сих пор мы рассматривали только средние величины; остается еще определить пределы колебаний, т. е. величину σ — так назыв. основное или квадратичное отклонение.

Пределы колебаний для R в отдельных группах трахитов дали следующее:

1) Для $R = 1.205$ (число анализов 33) $1.24 > R > 1.14$
2) Для $R = 0.87$ (число анализов 20) $0.98 > R > 0.76$
3) Для $R = 1.49$ (число анализов 16) $1.60 > R > 1.38$

Средняя величина для трахитов с R от 1.01 до 1.40 близка к прежней средней, а именно $R = 1.3$.

Для всей совокупности классов с $R > 1.01$ и < 1.50 получается среднее 1.45, если брать классы через 0.1, или 1.16, если брать классы через 0.2, т. е. считать центральным классом 1.11 до 1.30; обе эти величины дают в среднем тоже 1.3; быть может их и можно считать пределами колебаний для R, если считать 1.3 средним.[1]

III. Третьей характерной величиной является отношение $R^2O : RO$. В этом отношении наблюдается значительная однородность, так как у 72.4% всех анализов щелочей больше, чем щелочных земель; 20.5% дают $R^2O = RO$ и в 6.5% всех случаев $R^2O < RO$; но обе эти группы очевидно относятся к анализам пород, которые неправильно названы трахитами. В центральной группе трахитов практически у всех $R^2O > RO$, так как из 52 анализов таковое отношение наблюдается у 40 анализов, т. е. в 77%; три анализа (5.70%) дают приблизительно $R^2O = RO$ и девять анализов (17.3%) — $R^2O < RO$, но значительное большинство этих анализов сомнительно. В среднем, отношение щелочей к щелочным землям в группе нормальных трахитов не спускается ниже $\frac{R^2O}{RO}$[2] $= 1.2$ и не поднимается выше $\frac{R^2O}{RO} = 5$; но эти крайние случаи единичны; в среднем $\frac{R^2O}{RO} = 2.34$ (2.30), т. е. больше, чем у меня было первоначально (1.2 и 1.26).

У кислых трахитов с коэфициентом кислотности от 2.7 до 2.9—78.2%, всех анализов (36 из 46) приходится на долю лав с преобладанием щелочей над щелочными землями.

[1] Как видно, результаты в значительной степени зависят от того, как брать классы, так как одна и та же группа 68 анализов дает при разной их группировке по классам (1.00—1.10, 1.11—1.20 и т. д. или 1.11 до 1.30 и т. д.) столь существенно различные результаты, как 1.45 или 1.16 для R.

[2] Для краткости это отношение можно обозначить через r.

У кислых трахитов с коэфициентом кислотности — 3.05 тоже значительно преобладают лавы щелочные 63.6% (14 из 22) и притом у 12 анализов (т. е. 54.5%) $r = 2$.

IV. Обратимся в заключение еще к процентному содержанию кремнекислоты.

Таблица 4

SiO_2	51.1—51	52.1—53	53.1—54			
Число анализов .	1	2	3			
SiO_2	54.1—55	55.1—56	56.1—57	57.1—58	58.1—59	59.1—60
Число анализов .	2	5	14	11	15	12
SiO_2	60.1—61	61.1—62	62.1—63	63.1—64	64.1—65	65.1—66
Число анализов .	18	18	18	22	17	23
SiO_2	66.1—67	67.1—68	68.1—69	69.1—70	70.1—71	
Число анализов .	17	7	5	4	4	

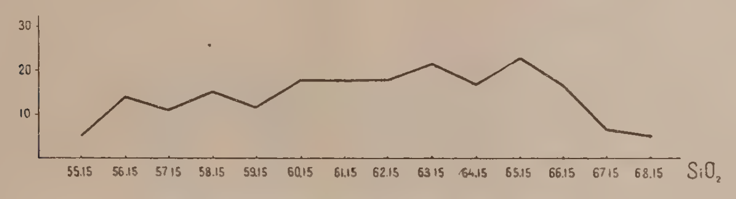
И эта таблица и диаграмма показывают, что центральной является группа трахитов с содержанием кремнекислоты от 60 до 62%, что есть два максимума для окситрахитов (трахидацитов), а именно 63.15% и 65.15% и два максимума для трахиандезитов: 58.15% и 56.15%.

Процентное содержание кремнекислоты тоже определенно показывает (см. таблицу 4 и фиг. 5), что под общим названием «трахиты» значатся и кислые лавы, переходные к дацитам и липаритам. Но если взять только те классы, которые отвечают настоящим трахитам, т. е. отбросить трахиты с содержанием кремнекислоты меньше 56% и больше 65%, то получим:

					(60.05)				
Классы . . .	4	3	2	1	0	1	2	3	4
Числоанализов	14	11	15	12	(18)	18	18	22	17
	—56	—33	—30	—12		+18	+36	+66	+68

Следовательно . . +188
−131
+ 57

Число анализов $n = 145$, среднее для класса 0... 60.05; к этому надо прибавить: $b = \frac{57}{145} = + 0.39$, а потому среднее содержание кремнекислоты $M = 60.44$. Эта величина очень близка к той, которая была мною получена из 48 анализов,[1] а именно 60.68.



Фиг. 5. Процентное содержание кремнекислоты.

У 54 анализов, составляющих три центральные группы, а всего 25.4% от всех анализов или 37.2% от настоящих трахитов с кремнекислотой больше 56% и меньше 65%, содержание SiO_2 в среднем 61.155.

В результате нашего разбора оказывается, что под названием трахиты описаны и анализированы породы, которые обнимают, кроме трахитов, еще ветвь трахидацитов (или окситрахитов).

Для типичных нормальных трахитов выясняется следующая характеристика: кайнотипные лавы, насыщенные кремнекислотой, но без избыточной кремнекислоты, с небольшим коэфициентом при $\overline{RO}$, т. е. породы лейкократовые и всегда с преобладанием щелочей над щелочными землями, т. е. щелочные.

Магматическая их характеристика такова:

В среднем:	$\alpha = 2.40$	Пределы колебаний:
	$R = 1.21$	Для α от 2.25 до 2.55
	$r = 2.34$ (2.30)	Для R от 1.14 до 1.24
	SiO = 60.44%	

---

[1] Loc. cit., стр. 2, прим.

F. LOEWINSON-LESSING. STATISTISCHE CHARAKTERISTIK DES CHEMISMUS DER TRACHYTE

ZUSAMMENFASSUNG

210 Analysen von Gesteinen die im Washington'schen Sammelwerk als Trachyte angeführt sind, wurden einer statistischen Bearbeitung unterworfen, wie es bereits früher für die Familien der Andesite, Basalte, Dacite und Liparite vom Verfasser gemacht worden ist. Als charakteristische «Koefficienten» wurden auch diesesmal folgende Grössen gewählt: 1) der Aziditäts-Koefficient α, 2) der Koefficient bei $\bar{R}O$ in der magmatischen Formel, kurz als R bezeichnet, 3) das Verhältniss $R_2O:RO$, kurz r, 4) der Prozentgehalt an Kieselsäure. Aus den Tabellen und den Kurven ist es leicht zu ersehen, dass unter der Bezeichnung Trachyte nicht allein echte Trachyte, sondern auch zahlreiche saure Trachyte (Oxytrachyte, Trachyliparite) figurieren. Für die echten Trachyte ergiebt sich folgende Charakteristik: kainotype Laven an Kieselsäure gesättigt, aber ohne überschüssige Kieselsäure, mit kleinem Koefficienten bei $\bar{R}O$, also leukokrate Gesteine; Alkalien immer über alkalische Erden überwiegend, also alkalische Laven.

Magmatische charakteristik (durchschnittlich):

$\alpha = 2.40$, zwischen 2.25 und 2.55 variirend;
$R = 1.21$, Variationen von 1.14 bis 1.24.
$r = 2.34$ (oder 2.30).
$SiO_2 = 60.44\%$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

НИТРИФИКАЦИЯ В ЛЕСНЫХ ПОЧВАХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОСТАВА НАСАЖДЕНИЯ, РУБКИ И ОГНЕВОЙ ОЧИСТКИ ЛЕСОСЕК[1]

Н. Н. СУШКИНОЙ

(*Представлено академиком* А. А. Борисяком)

Жизнь почвы не может определяться как ряд исключительно физических и химических превращений. Каждый грамм почвы населен бесчисленным множеством микроорганизмов, которые, конечно, должны играть существенную роль в тех изменениях, которые происходят в почвах. Из литературных данных (1, 2, 3)[2] известно, что в среднем наши нормальные черноземы содержат 2 млрд. бактерий в 1 г почвы. Приблизительный вес такого числа бактерий будет равен 0.0256 г, что составляет 2.56% от веса всей почвы. По объему же это количество бактерий займет 0.031 см^3 в 1 см^3 почвы (3). Что касается оподзоленных почв, то здесь число бактерий падает, но все же средняя населенность этих почв, судя по данным О. Г. Шульгиной и М. Л. Степановой (1, 2), колеблется около 1—1$^1/_2$ млрд. индивидов в 1 г почвы. Совершенно ясно, что такое количество живого вещества в почвах не может не иметь первенствующего значения в жизни почвы. И действительно, можно наблюдать, что микроорганизмы в значительной степени управляют химическими изменениями в почве, а зачастую, может быть, и подчиняют их себе.

Процесс разложения органического вещества и минерализации его — один из важнейших моментов в жизни каждой почвы в смысле мобилизации веществ, необходимых для питания растений, — является в основном процессом биохимическим, т. е. таким, который совершается при помощи микроорганизмов.

[1] Настоящая работа была выполнена на средства и по заданию Ленинградского научно-исследовательского института лесной промышленности как часть общей комплексной работы института по вопросу о наилучшем способе очистки лесосек. Руководство всеми работами по указанному вопросу принадлежало проф. М. Е. Ткаченко.

[2] Цифры в скобках указывают на номера трудов, приведенных в списке литературы.

И мы часто видим, что химическое исследование почвы лишь подводит итоги тому, что было вызвано к жизни работой бесчисленного множества невидимых почвенных бактерий. Поэтому, затрагивая вопрос о тех или иных мероприятиях в лесном хозяйстве, ставящих себе целью способствовать лесовозобновлению, необходимо учитывать, как они отражаются на почвенной микрофлоре — на этом могучем факторе почвенных изменений, которому смежные дисциплины в последнее время вполне справедливо стали уделять все больше и больше внимания.

Одним из основных вопросов питания растений является вопрос о достаточном снабжении их азотом. Годичная потребность в азоте лесных насаждений будет в среднем 8 кг на 1 га для построения древесины, а для построения всего органического вещества деревьев, включая сюда крону и древесину—38 кг для елового леса и 51 кг для букового (4).

Этот значительный расход азота должен каким-то образом покрываться почвой.

Можно совершенно пренебречь при подсчете азотного баланса теми незначительными количествами азота, которые попадают в почву вместе с атмосферными осадками. Заметную роль играет, напротив, способность лесных почв к ассимиляции азота из воздуха при помощи микроорганизмов (5). Так, по Бейеринку и Реми (Худяков, 6), лесные почвы могут связывать от 25 до 50 кг атмосферного азота на 1 га. Но главным источником азотистого питания все же служит тот материал из листьев, хвои, сучьев и отмирающих растений, который накапливается на поверхности почвы в лесах в виде подстилки.

Süchting (7) считает, что лишь 20% всех получаемых деревьями питательных веществ превращается ими в древесину, а 80% — в листву и хвою. Таким образом, до 80% питательных веществ снова возвращаются в почву вместе с опадающей листвой и хвоей.

Поэтому мы в праве говорить о больших накоплениях азота в лесной подстилке и считать ее главным источником азотистого питания для лесных растений. В силу этого все биохимические процессы, ведущие к разложению азотсодержащих органических веществ подстилки и к минерализации органически связанного азота, точно так же, как и скорость протекания их, имеют особо важное значение для правильного питания леса и его возобновления. В связи с этим интересно отметить, что скорость разложения подстилки сильно варьирует в зависимости от типа почвы и состава насаждения. В лиственных лесах, на здоровых почвах с благоприятным воздушным и водным режимом и с почти нейтральным pH (6.4—6.8) разложение под-

стилки в большинстве случаев проходит в 1—2, реже в 3 года (7); исключение составляют дубовые и буковые насаждения. Наоборот, в хвойных лесах с моховым покровом процесс этот значительно замедляется.

В своей работе 1925 г. Süchting (8) высказывает предположение, что главная масса азотсодержащих веществ гумуса сосновых лесов имеет гетероциклическое строение, что почти исключает возможность их разложения биологическим путем. В этом Süchting видит причину того, что азотсодержащие вещества гумуса сосновых лесов чрезвычайно трудно разложимы, и что очень небольшая часть их способна быстро минерализоваться. Grosskopf (9) выдвигает другое объяснение. Он считает, что в клеточных оболочках игол хвойных деревьев содержится больше лигнина, чем целлюлозы. Лигнин же разлагается микроорганизмами, живущими лишь в почвах, богатых основаниями. Funk (10) указывает, что хвоя разлагается вообще труднее листвы, но и среди лиственных пород листья дуба и бука остаются неизмененными годами, в то время как от листьев тополя, клена, граба, магнолии в течение года остаются лишь сеть сосудов и черенки.

Из мхов, отмершие остатки *Hypnum* распадаются очень легко; в 2—3 года от них не остается следа. Стебельки *Polytrichum* сохраняются годами, *Sphagnum* же в условиях верхового болота не разлагается тысячелетиями.

Что касается вопроса о том, в каких формах может утилизироваться азот древесными породами, то известно, что деревья могут одинаково потреблять как азотнокислые соединения, так и аммонийные соли.

В этом смысле авторы разделяют лесные породы на две большие группы:

1) Древесные породы, растущие на более кислых почвах, для которых нейтральная или щелочная реакция не является необходимой (например, оптимум для роста сосны будет при pH = 4.0.—A Němec und Kvapil, 11), относятся к группе, которую Hesselman (12) называет «Ammoniakpflanzen» — растения, которые хорошо потребляют аммиак, а может быть даже предпочитают аммонийные соли другим. Это будут по преимуществу хвойные леса с моховым покровом (*Hylocomium, Hypnum*, *Dicranum*, *Polytrichum*). Хвоя имеет в своем составе большое количество смолоподобных соединений. Мхи же характеризуются высоким содержанием экстрактивных веществ (13). Оба эти обстоятельства являются, по мнению Němec'a (13), одной из главных причин, почему в хвойных лесах с моховым покровом нитрификация, как правило, не идет.

2) Древесные породы на менее кислых почвах (pH=6.4—6.8), где вследствие этого лучше идет нитрификация (10), возможно, будут предпочти-

тельнее утилизировать в качестве азотистого питания нитраты. Это будут чаще всего лиственные насаждения с травяным покровом.

Кроме того, в литературе имеются указания F. Frank'a, Falck'a (Funk, 10), Melin'a (14), что деревья при помощи микориз могут непосредственно утилизировать органически связанный азот подстилки на той стадии расщепления белковой молекулы, когда образуются пептоны, полипептиды и аминокислоты (15). Но значение этого способа азотистого питания еще не установлено твердо и правильнее пока на нем не задерживаться.

Настоящее исследование было предпринято с целью собрать материал по вопросу о том, какую роль играют микроорганизмы при изменениях, происходящих в почве при огневой очистке лесосек. Конечно, здесь нельзя было не коснуться вопроса о влиянии предшествовавшей рубки, а также вопроса о составе микрофлоры в зависимости от характера насаждения. В виду же обширности и сложности поставленной задачи на первое место было выдвинуто исследование более специального вопроса о способности почв к нитрификации в нетронутом лесном насаждении того или иного состава, в вырубленных на нем лесосеках и, наконец, в тех же лесосеках после огневой очистки.

Что касается специально той связи, которая существует между составом лесного насаждения и способностью почв к образованию нитратов, то этот вопрос имеет обширную литературу. Hesselman в своем труде об образовании нитратов в лесных почвах (12) дает характеристику различных лесных сообществ в смысле способности их почв к нитрификации. Краткая литературная сводка по этому же вопросу дана в нашей статье «К микробиологии лесных почв в связи с действием на них огня» (16), а поэтому мы здесь подробнее останавливаться на этом не будем. Дополним лишь, что зависимость между характером насаждения и способностью почв к нитрификации, может быть, гораздо сложнее, чем кажется на первый взгляд. Каждому составу насаждения соответствует свой определенный растительный покров. Последний, как и состав древесного насаждения, связывается с величиной pH почвы. Olsen в своей работе о концентрации водородных ионов в почве (17) дает таблицу, которая показывает, при какой реакции почвы, какие виды растений численно преобладают. В свою очередь величина pH отражается на ходе нитрификации. Таким образом, получается длинная цепь сложной зависимости одних факторов от других, которую мы в конечном итоге схематично выражаем как зависимость между способностью почв к нитрификации и типом леса.

Вторая и третья часть вопроса относительно влияния рубки и огня на нитрификационную деятельность почв разработаны значительно слабее. На первом месте здесь снова следует поставить исследования Hesselman'a (18).

Основные выводы его сводятся к следующим положениям:

a) Рубка, которая дает доступ свету и теплу, оказывает большое влияние на превращения азота в почве.

b) В том случае, если подстилка тонка и рыхла, то даже если она состоит, главным образом, из мхов и игол, к которым лишь примешаны остатки травянистых растений, рубка может повести к возникновению нитрификации и к окислению азота гумуса в азотнокислые соединения. Первоначально растительный покров лесосеки сохраняет свой прежний состав из мхов, и нитрификационные процессы развиваются очень слабо, но уже в течение лета, последовавшего за рубкой, происходят крупные изменения. К осени на лесосеке появляются из нитратофильных растений *Epilobium angustifolium*, *Rubus idaeus*, *Senicio* sp и др. (список нитратофильных растений см. 16, стр. 138), и нитрификационные процессы приобретают значительную интенсивность.

В опытах, поставленных с почвами, взятыми с лесосеки через 3 года после произведенной рубки, была констатирована прибыль нитратного азота в 220 мг на 1000 г почвы в течение 13 недель, которые длился опыт. В другом случае лесосека, вырубленная 4 года тому назад, дала прирост нитратного азота в тот же срок и при тех же условиях в 530 мг на 1000 г почвы.[1]

c) Если, наоборот, подстилка представляет собою толстый слой грубого гумуса (так называемого Rohhumus), плохо пропускающего тепло, рубка, правда, способствует превращению органического азота в аммиак, но последний не окисляется в азотную кислоту. В таких случаях нитратофильные растения на лесосеках не появляются, а вместо них богато развивается *Aira flexuosa*[2]

Однако и в подобных почвах нитрификация может быть вызвана более радикальными мерами — именно, механической обработкой почвы, с целью смешения гумуса с минеральной почвой, с разлагающимся хворостом, с гниющими остатками деревьев, а также действием огня при сжигании лесного хлама. Действие огня на нитрификационные процессы вообще считается, как указывал и Hesselman (18), благоприятствующим лесовозобно-

[1] Для сравнения укажем, что наши полевые оподзоленные почвы в течение трехнедельного лабораторного опыта не способны накоплять в среднем больше 30 мг нитратного азота на 1000 г почвы (см. Тр. отд. с.-х. микробиологии, т. I—IV).

[2] Наблюдения производились Hesselman'ом в южной части Швеции.

влению. Сначала предполагалось, что главная причина этого заключается в золе, которая, остается в больших количествах от сгоревших растительных остатков, но оказалось, что зола очень быстро вымывается, и уже через год пробы соляной кислотой не обнаруживают карбонатов одинаково как в обожженных, так и в необожженных почвах. По мнению Hesselman'a (18) главную роль здесь играет нитрификация, которая или возникает, или значительно усиливается после прошедшего по лесу огня. Такое повышение нитрификационной деятельности почв подтверждается, между прочим, по Hesselman'y тем, что как после рубки, так и после действия огня мы наблюдаем появление в лесу целого ряда нитратофильных растений — *Epilobium angustifolium*, *Rubus idaeus* и др. Последней в Швеции даже присвоено кое-где местное название «burnberry» — «пожарная ягода». Точно так же для Северо-Американских Соединенных Штатов американские авторы Cooper 1913 г., Rubel 1916 (Hesselman, 18) отмечают появление на гарях *Epilobium angustifolium*, *Rubus idaeus* и *Rubus strigosus*, близкой к малине. В Колорадо эти растения появляются на гарях после сгоревшей *Pinus contarta*. Кроме приведенных наблюдений Hesselman'ом был проделан ряд опытов с почвами лесных гарей для наблюдения над теми изменениями, которые происходят в потенциальной способности этих почв к нитрификации после действия на них огня.

Выводы его можно резюмировать следующим образом:

1) Огонь часто вызывает появление нитрификационных процессов в лесных почвах, которые раньше не были способны к нитрификации.

2) Если почва и раньше была способна к нитрификации, то после действия огня эта способность сильно увеличивается. Hesselman наблюдал, что почва смешанного хвойного леса с моховым покровом, накапливавшая нормально в течение 12 недель всего 0.4 нитратного азота на 1000 г почвы, даже через 5 лет после прошедшего по лесу пожара еще оказывалась способной накапливать в тот же срок 24 мг.

Другая, также пятилетняя гарь, дала ему вместо 3.5 мг 56 мг. Участок леса, обожженный за 8 лет перед тем для разведения сосны, в тех местах его, которые оставались в виде островов покрытыми *Epilobium angustifolium* и *Rubus idaeus*, давал в течение 6 недель 100 мг нитратного азота, вместо прежних 0.2 мг. Но та бо̀льшая часть этого участка, на которой возобновился покров из *Polytrichum*, утратила эту способность и давала всего лишь 0.4 мг, вместо прежних 0.2.

Искусственная огневая очистка лесосек в одном случае повела к тому, что к осени второго года после обжига потенциальная способность почвы

к нитрификации, выражалась 190 мг (!) вместо прежних 0.3 (срок 9 недель) и, наконец, почва одной лесосеки через 10 лет после огневой очистки накапливала в течение 13 недель 360 (!!) мг вместо прежних 0.6.

3) Нитрификация развивается слабее на сильно обожженных местах. Нитратофильное растение — малина определенно чаще появляется на более слабо обожженных участках.

4) Наблюдения над тем, насколько скоро после действия огня в почве появляется нитрификация, не производились.

5) Возникновение нитрификации или усиление ее после рубки или после действия огня носит лишь временный характер. Продолжительность действия, видимо, может зависеть от интенсивности бывшего обжига. Hesselman наблюдал, что нитрификация развивалась в жидкой среде при заражении ее почвой 25-летней гари, сохранившей лишь ничтожные остатки «burn flora».

С другой стороны, иногда нитрификация прекращалась очень быстро после пожара.

Но во всех случаях, по мере того как после пожара над почвой замыкалась крона леса, нитрификация постепенно ослабевала и в конце концов прекращалась.

6) Возобновление леса идет хорошо везде, где наблюдается интенсивная нитрификация.

Для хвойного леса наличие нитрификационных процессов в почве не есть обязательное условие для хорошего возобновления, но, во всяком случае, является благоприятствующим фактором (18 и 19).

7) Объяснения Hesselman'a относительно причин возникновения или усиления нитрификационных процессов в почве под влиянием рубки или в результате действия огня подробно приведены в нашей статье «К микробиологии лесных почв в связи с действием на них огня» (16), на которую мы уже ссылались выше. Не отрицая значения изменения величины pH после упомянутых воздействий, Hesselman, однако, считает одним из важнейших факторов, стимулирующих нитрификационные процессы в почве после пожара, увеличение количества электролитов, что благоприятно отражается на физических свойствах почвы.

8) На ряду с приведенными взглядами Hesselman'a следует отметить работу G. Gopal Rao и N. R. Dhar (20), появившуюся в 1931 г., в которой авторы приходят к следующим выводам. Окисление аммиачных соединений в почве происходит не только за счет бактерий, а является частично процессом фотохимическим, идущим в поверхностных слоях почвы при помощи катализаторов, способных поглощать солнечную энергию. К таковым отно-

сятся окислы: титана TiO_2, цинка ZnO, кадмия CdO, алюминия Al_2O_3 и кремния SiO_2 — из которых большинство почти всегда встречается в почвах.

Окислы титана, цинка и кадмия действуют гораздо энергичнее, чем окислы алюминия и кремния, поэтому почвы, содержащие кроме окислов алюминия и кремния окислы титана, цинка, кадмия, а, может быть, и еще какие-либо другие неизвестные нам каталитически действующие вещества, отличаются особо высокой нитрификационной способностью и повышенным плодородием. Geilmann (21), цитируемый названными выше авторами, указывает, что наиболее плодородные почвы содержат до 0.3—0.6% титана. Точно так же до 0.27% титана содержится в золе всех растений.

Все приведенные выше соображения имеют особый интерес для темы настоящей работы. Нам представляется вполне допустимым частично перенести наблюдения авторов с неорганизованного мира на организованный и поставить вопрос о том, не возможно ли такое же каталитическое воздействие тех или иных веществ, встречающихся в почве, на деятельность нитрифицирующих бактерий. Не является ли наблюдаемое резкое повышение нитрифицирующей деятельности почвы к осени и на лесосеках после рубки результатом усилившегося, вследствие большей инсоляции, воздействия подобных веществ на деятельность бактерий, и не объясняется ли резкое поднятие интенсивности работы нитрификаторов после действия огня на почву (лесные пожары и искусственные обжиги) тем, что при этом почва обогащается золой растений, которая как раз может содержать в себе вещества, способные активировать работу бактерий. Само собою разумеется мы говорим здесь лишь о возможности частичного объяснения наблюдаемых закономерностей в ходе нитрификации в лесных почвах в зависимости от рубки и действия огня.

9) Необходимо оговорить, что все изложенные выше опыты Hesselman'а проводились в Швеции, Достаточно сходные климатические условия делали весьма вероятным возможность применения его выводов к нашим северным лесам, но все же было осторожнее произвести предварительную проверку этих данных.

Такими соображениями оправдывается тема настоящего исследования.[1]

[1] Вопрос о наилучшем способе очистки лесосек в нашей области было предположено разрешить параллельными исследованиями лесоводов, почвоведов-химиков и микробиологов. Таким образом, настоящая работа является одним из звеньев в этой общей комплексной работе.

Потенциальная способность лесных почв к нитрификации

ВЗЯТИЕ ОБРАЗЦОВ И ОБЖИГИ

Материал для работы был собран в Ленинградской области в Заборском учлеспромхозе Череповецкого округа и в Ульяновском Ленинградского округа.

В каждом отдельном случае образцы брались: a) в лесу, b) на лесосеке, c) на кострище после обжига. Таким образом, являлась возможность выяснить отдельно действие рубки и огня на работу почвенных микроорганизмов.

В течение лета пробы были взяты с каждого участка дважды (за исключением верескового бора) с промежутком между первым и вторым взятием приблизительно от полутора — до трех месяцев. В первый раз после обжига образцы брались через разные сроки от нескольких дней и до трех недель.

Точные даты всюду указаны при таблицах; там же отмечено, каким образом производились обжигания.

МЕТОДИКА

Количественные определения потенциальпой способности почв к нитрификации производились по методу Ваксмана непосредственно в почвах (описание этой методики в общих чертах см. Труды отд. с.-х. микробиологии ГИОА, 1927, т. II, стр. 20—21). Опыты ставились при условии только увлажнения почвы водой и со внесением в почвы азотистых удобрений: органического в виде лупиновой муки и минерального в виде сернокислого аммония.

ОПИСАНИЕ ОПЫТОВ[1]

Piceetum oxalidosum[2]

В Ульяновском учлеспромхозе были исследованы две разности елового леса-кисличника, которые в дальнейшем будут обозначаться как Piceetum oxalidosum и как Piceeto-Betuletum oxalidosum.

[1] Все описания лесоводственного и ботанического характера заимствованы из наблюдений лесоводов С. П. Румянцева и Б. К. Ярмоловича, которые имеют появиться в печати в ближайшем будущем.

[2] Piceetum oxalidosum — еловый лес, в травяном покрове которого преобладает кислица — *Oxalis acetosella;* иногда такие леса называют еловыми лесами-кисличняками.

Разность, исследованная в Заборском учлеспромхозе, будет обозначаться как Piceetum Myrtilloso-oxalidosum.[1] Кроме того, в Ульяновском же учлеспромхозе был изучен тип леса Piceetum fontinale — ручейковый ельник, а в Заборском — Pinetum callunosum — вересковый бор.

Вследствие большого количества осадков летом 1930 г. почти все лесосеки, так же как и кострища, ко времени второго взятия образцов оказались избыточно увлажненными, а иногда и заболоченными. В лесу подобного явления не замечалось. Кострища ко второму взятию проб обычно успевали покрыться в центре различными мхами и маршанцией. По периферии большею частью вырастали *Potentilla tormentilla* и небольшие розетки сложноцветных, оставшихся, к сожалению, не определенными. Все данные, характеризующие почвы исследованных типов леса до и после обжига в смысле потенциальной способности этих почв и нитрификации сведены в общие таблицы. Во всех таблицах 0 означает отсутствие процесса; черта означает, что исследование не производилось.

Piceetum oxalidosum (табл. 1)

Насаждение преимущественно чистое с примесью единичных берез 10Е + ед. Б; возраст 65—100 лет; полнота 0.9; средний диаметр 25 см; средняя высота 23 м; запас 320 м^3; бонитет I—II.

Второй ярус обычно отсутствует. Подрост исключительно еловый, чахлый в сомкнутых насаждениях и имеющий крепкий, здоровый вид в «окнах» и там, где в составе леса участвует береза.

Подлесок очень редкий из: *Sorbus aucuparia* — sol.
Rhamnus frangula — sol.

В месте взятия образцов травяной покров состоял:[2]

В лесу:

1-й ярус	*Calamagrostis silvatica, Agrostii vulgaris*	cop.[1]
„ „	*Rubus saxatilis*	sp.
„ „	*Convallaria majalis*	sp.
2-й ярус	*Majanthemum bifolium*	cop.[2]
„ „	*Vaccinium Vitis Idaea*	sp.
3-й ярус	*Oxalis acetosella*	cop.[3]
4-й ярус	Гипновые мхи (преобладает *Hylocomium proliferum*)	cop.[2]

[1] Все три приведенные разности Piceetum oxalidosum отличаются друг от друга, главным образом, примесью того или иного количества лиственных пород и составом травяного покрова. Подробное описание характерных особенностей указанных разностей Piceetum oxalidosum см. в тех же упомянутых выше работах С. П. Румянцева и Б. К. Ярмоловича.

[2] К сожалению злаки и мхи не во всех случаях были определены.

На лесосеке:

1-й ярус	*Calamagrostis silvatica, Agrostis vulgaris*	cop.[1]
„ „	*Hypericum perforatum*	sp.
„ „	*Rubus saxatilis*	sp.
„ „	*Convallaria majalis*	sp.
2-й ярус	*Majanthemum bifolium*	sp.
3-й ярус	*Oxalis acetosella*	cop.[1]
4-й ярус	Гипновые мхи	cop.[2]

К осени появилась осока, которой весной не было.

На кострище: мхи и маршанция в центре. *Potentilla tormentilla* и розетки сложноцветных по периферии. Кострище было сильно увлажнено.

Рельеф — пологий склон.[1]

Микрорельеф — слабо волнистая поверхность от приподнятостей корневых лап.

Материнская порода — валунный суглинок.

Почва тяжело-суглинистая, сильно оподзоленная.

A_0 0—5. Лесная подстилка из неперегнившей хвои, мхов и трав коричневого цвета.

$A_1 + A_2$ 5—10. Серого цвета, сильно оподзоленный, свежий. Гумусовая окраска преобладает в верхней части горизонта сразу под подстилкой. Горизонт сильно уплотнен. По механическому составу — средний суглинок.

A_2 10—20. Светлосерый с желтоватым оттенком, очень сухой, плотный, средний суглинок с включениями мелких валунчиков.

В — Коричневого цвета с бурыми пятнами, плотный и сухой. Богат ортштейновыми включениями. По механическому составу — тяжелый суглинок.

Рассмотрение табл. 1 приводит нас к выводу, что данный тип леса — чистое насаждение с преобладанием мохового покрова и большим количеством злаков — неспособно к нитрификации. Рубка не оказывает в этом отношении влияния на почву, и лишь более сильное воздействие в виде огня приводит к тому, что уже через 2 дня после прошедшего по лесу пожара почва приобретает хоть и слабую, но все же явно улавливаемую способность нитрифицировать органический азот подстилки. Через 3 месяца эта способность становится уже значительной и в десятки раз превосходит способность к нитрификации наших полевых почв, считающихся плодородными.[2]

[1] Все описания почвенных разрезов, цитируемые в этой работе, составлены почвоведом Е. П. Любочской и относятся к профилям, сделанным в лесу.

[2] Как указывалось выше (см. стр. 115), наши полевые оподзоленные почвы способны накоплять в среднем от 0.7 до 3.0 мг нитратного азота на 100 г сухой почвы в течение 3-недельного опыта. Koch (22) считает, что плодородная полевая почва содержит около 1 мг нитратного азота в 100 г почвы.

Отметим необычайное повышение нитрификационной деятельности этих почв при внесении в них лупиновой муки и сернокислого аммония (повторное взятие образцов). Эта особенность их резко отличает их от почв других разностей Piceetum oxalidosum и сближает с почвами Pinetum callunosum. Подробнее этот вопрос разобран при описании способности к нитрификации почв Pinetum callunosum (см. стр. 133).

Весьма вероятно, что отрицательное влияние на ход нитрификации в этом типе леса оказывают: состав подстилки из хвои и мхов, а также неблагоприятные физические свойства почвы, которая представляет собою очень сухой и плотный тяжелый суглинок, к тому же сильно оподзоленный. Кроме того, обилие злаков, преимущественно *Calamagrostis silvatica*, имеющего богато развитую корневую систему в виде густого войлока, должно также затруднять аэрацию почвы и следовательно угнетать деятельность облигатно-аэробных нитрифицирующих бактерий.

Piceeto-Betuletum oxalidosum (табл. 2)

Насаждение смешанного состава 5Е, 3Б, 2Ос.; возраст 70 лет; полнота 0.7; средний диаметр 27 см; средняя высота 25 м; запас 270 м^3; бонитет I. Подрост еловый, разновозрастный и разновысотный. В подлеске: *Lonicera*, *Holostea*, *Rhamnus frangula*. К осени как лесосека, так и кострище были сравнительно сухими.

В месте производства опытов в травяном покрове встречались:

В лесу:

1-й ярус	*Vaccinium Myrtillus*	cop.^{2}
,, ,,	*Vaccinium Vitis Idaea*	cop.^{1}
,, ,,	Злаки (*Calamagrostis silvatica*)	cop.^{1}
,, ,,	*Rubus saxatilis*	sp.
,, ,,	*Paris quadrifolia*	sp.
,, ,,	*Ranunculus acer*	sp.
,, ,,	*Asplenium felix femina*	un.
2-й ярус	*Fragaria vesca*	cop.^{1}
,, ,,	*Asarum europeum*	cop.^{1}
,, ,,	*Pteris aquilina*	sp.
,, ,,	*Lycopodium annotinum*	sp.
3-й ярус	*Oxalis acetosella*	cop.^{3}
,, ,,	*Trientalis europca*	sp.
4-й ярус	Гипновые мхи	cop.^{3}

На лесосеке:

1-й ярус	*Calamagrostis silvatica, Deshampsia flexuosa*	cop.^{1}
,, ,,	*Vicea cracca*	cop.^{1}
,, ,,	*Aegopoduim podagraria*	sp.
,, ,,	*Anemone nemorosa*	sp.

2-й ярус *Majanthemum bifolium* . . . . cop.[1]
" " *Asarum europeum* . . . . sp.
" " *Veronica officinalis* . . . . un.
3-й ярус Зеленые мхи . . . . cop.[3]

На кострище: Та же картина, как и в типе Piceetum oxalidosum. Микрорельеф — ровное место.

Почва — слабо оподзоленный легкий суглинок на валунных отложениях.

A_0 0—3. Рыхлая лесная подстилка из полуразложившихся остатков хвои, листьев, мхов и трав.
A_1 3—10 (14). Бурого цвета, средне-суглинистый с включениями валунов.
A_2B 10 (14)—32. Серо-светло-желтый, легко суглинистый с включением мелких валунов. Ниже — песок без заметного изменения почвообразовательным процессом.
Дренаж — хороший.

Нитрификационная деятельность почв этого типа характеризуется табл. 2.

Данные, собранные в таблице 2, позволяют заключить, что почвы из-под насаждений смешанного состава, имеющие в своем травяном покрове представителей нитратофильных растений, как *Fragaria vesca* cop.[1] и *Asarum europeum* cop.[1], более склонны к нитрификации, чем почвы чистого елового леса с более резко выраженным преобладанием мохового покрова. Следы нитратов появляются здесь уже в опытах с почвами, взятыми из под нетронутого леса.

Бо̀льшая склонность почв к нитрификации явствует и из того, что рубка вызывает здесь накопление нитратов в опытах — очень небольшое в почвах взятых в начале лета и довольно значительное к осени.

Видимо, прогревание почвы в течение всего лета, а возможно также и постоянное поднятие солей из нижних горизонтов, благодаря значительно бо̀льшей испаряющей деятельности почвы, не защищенной лесом и покрытой травами, ведет к тому, что в результате этих влияний к осени жизнедеятельность нитрифицирующих бактерий значительно усиливается. Изложенное выше (стр. 117, 118) предположение о возможности воздействия катализаторов на активность нитрифицирующих бактерий точно так же допустимо в данном случае.

На увеличение количеств нитратного азота в лесных почвах к осени указывает Feher в своих работах, вышедших в 1920 г. (15 и 23). Feher устанавливает два максимума в деятельности нитрифицирующих бактерий — один весенний, и другой — осенний. По мнению Feher'а повышение интенсивности работы нитрифицирующих бактерий к осени обусловливается двумя

причинами: аккумулятивным воздействием тепла и теми коррелятивными изменениями в количественных соотношениях между нитрифицирующими и денитрифицирующими бактериями, которые наблюдаются в течение лета. Последнее имеет первенствующее значение. Периоды максимальной деятельности нитрификаторов почти всегда совпадают с периодами минимального развития денитрификаторов и наоборот. Минимум же деятельности денитрифицирующих бактерий падает, по мнению Feher'a, как раз на весну и на осень, когда наблюдается усиленная работа нитрификаторов.

Что касается действия обжигания, то здесь мы видим следующее отличие от Piceetum oxalidosum. Первое взятие образцов, приблизительно через две недели после обжига, не дало положительных результатов. Точно так же последующий эффект оказался значительно меньшим по сравнению с Piceetum oxalidosum. Следует, кроме того, отметить появление нитрификации после обжига в горизонте A_2B на глубине 10—18 см, что не наблюдалось в других случаях. Для объяснения всех этих особенностей мы считаем возможным дать следующую картину процесса, которая, однако, не может считаться доказанной и выдвигается нами только как вероятная.

В то время как в первом случае по лесосеке прошел естественный пожар, во втором было произведено искусственное сжигание значительной кучи хвороста. Понятно, что в последнем случае воздействие огня было более концентрированным, что могло вредно отразиться на нитрифицирующих бактериях; частично они могли даже погибнуть, во всяком случае возврат их к активной работе произошел гораздо позднее, чем в случае Piceetum oxalidosum, и работа их в дальнейшем оказалась менее интенсивной.

Что касается, наконец, появления нитрификации в горизонте A_2B, то его, может быть, можно отчасти объяснить активной миграцией нитрифицирующих бактерий вниз в связи со слишком высокой температурой, развившейся в верхнем горизонте.

Подобные миграции нитрифицирующих бактерий в глубину наблюдались А. М. Шелоумовой в засушливые летние месяцы.

Непонятным лишь является то отсутствие нитрификации, которое наблюдается в горизонте A_1 3—10.

По своему механическому составу почва Piceeto-Betuletum oxalidosum представляет собой легкий суглинок; его физические свойства более благоприятны для развития нитрификационных процессов, чем свойства тяжелого суглинка из-под Piceetum oxalidosum. Оподзоленность этой почвы также значительно меньше таковой Piceetum oxalidosum. В отноше-

нии величины pH большого различия между почвами Piceetum oxalidosum и Piceeto-Betuletum oxalidosum не наблюдается. В тех случаях, когда нитрификация развивается, не удается уловить полного параллелизма между величиной pH и интенсивностью нитрификационных процессов.

Так, нитрификация развивается примерно вдвое интенсивнее в Piceetum oxalidosum в горизонте A_0 (кострище, повторное взятие) при pH = 6.2, чем в соответствующем горизонте Piceeto-Betuletum oxalidosum с pH = 7.5. Но, с другой стороны, упомянутый выше горизонт A_2B 10—18 (Piceeto-Betuletum oxalidosum, кострище, повторное взятие), в котором развивается нитрификация, имеет более щелочное pH, чем A_2 10—20 Piceetum oxalidosum.

Piceetum Myrtilloso-oxalidosum (табл. 3)

Насаждение преимущественно чистое с примесью одиночных берез и осин, 10Е + едБ. + ед. Ос; возраст 120—170 лет; полнота 0.7; средний диаметр 28 см; средняя высота 28 м; запас 350—400 м³; бонитет I. 2-й ярус отсутствует. Подрост еловый с сильной энергией роста лишь в окнах.

Подлесок средней густоты из *Sorbus aucuparia* — sp., *Alnus incana* — sol., *Rhamnus frangula* — sol., единично клен и липа.

Травяной покров из следующих представителей.

В лесу:

1-й ярус	*Calamagrostis silvatica*	sp.
„ „	*Aconitum septentrionale*	sp.
„ „	*Rubus idaeus* (на вывороченных корнях деревьев)	sp.
2-й ярус	*Equisetum silvaticum*	cop.²
„ „	*Vaccinium Myrtillus*	cop.¹
„ „	*Vaccinium Vitis Idaea*	sp.
„ „	*Convallaria majalis*	sp.
„ „	*Aegopodium podagraria*	sp.
„ „	*Dryopteris Phegopteris*	sp.
„ „	*Asplenium felix femina*	sp.
„ „	*Rubus saxatilis*	sp.
„ „	*Orobus vernus*	sp.
„ „	*Vicia cracca*	un.
„ „	*Compositae*	un.
3-й ярус	*Majanthemum bifolium*	cop.²
„ „	*Oxalis acetosella*	cop.¹
„ „	*Lycopodium complanatum*	un.
„ „	*Trientalis europaea*	un.
4-й ярус	*Hylocomium proliferum*	cop.³
„ „	*Hypnum sp.*	cop.³
„ „	*Dicranum* sp.	sp.

На лесосеке:

1-й ярус	*Calamagrostis silvatica*	sp.
„ „	*Aconitum septentrionale*	sp.
2-й ярус	*Vaccinium Myrtillus*	cop.²
„ „	*Stellaria holostea*	cop.¹
„ „	*Dryopteris Phegopteris*	cop.¹
„ „	*Vaccinium Vitis Idaea*	sp.
„ „	*Rubus saxatilis*	sp.
„ „	*Aegopodium podagraria*	sp.
„ „	*Orobus vernus*	sp.
„ „	*Paris quadrifolia*	un.
„ „	*Pirola rotundifolia*	un.
3-й ярус	*Oxalis acetosella*	cop.²
„ „	*Majanthemum bifolium*	cop.¹
„ „	*Trientalis europaea*	sp.
4-й ярус	Мхи	cop.²

На кострище: В центре кое-где мхи; по периферии немного розеток Compositae, *Potentilla tormentilla* не было, в то время как на других кострищах она была в цвету. Кострище имеет более голый вид, чем остальные, видимо, в связи с тем, что промежуток между обжигом и вторым взятием образцов был здесь приблизительно вдвое короче, чем в остальных случаях. Кострище было сильно увлажнено.

Рельеф — слабо пологий склон ССВ экспозиции.

Микрорельеф — слабо волнистый от заросших пней и колод.

Почва — легко суглинистая, слабо оподзоленная на валунном суглинке,

A_0 0—5 (10). Рыхлая лесная подстилка из неразложившихся остатков хвои, листьев и трав.

A_1 5 (10)—10 (15). Черный с серым оттенком, средне-суглинистый.

A_2 10 (15)—25. Серого цвета с желтым оттенком, более легкий суглинок переходит в красную глину с большим количеством известкового щебня и валунов. Вскипание с глубины 70—75 см.

Дренаж плохой.

Сравнивая травяной покров Piceetum Myrtilloso-oxalidosum с травяным покровом Piceeto-Betuletum oxalidosum можно отметить, с одной стороны, отсутствие в нем нитратофильных растений[1], с другой стороны, меньшее количество злаков. Но на лесосеке мы встречаем уже в довольно больших количествах *Stellaria* — cop.¹, которая по Hesselman'у нуждается в нитратах.

[1] Исключение составляет *Rubus idaeus*, которая однако селится исключительно на лапах вывороченных корней деревьев, где происходит смешение минеральной почвы с подстилкой. Таким образом, появление малины по Hesselman'у (18) здесь происходит под влиянием совершенно самостоятельного фактора и не может служить показателем нитрификационной способности почвы с ненарушенным строением.

Таким образом, судя по растительности, мы в праве ожидать, что по способности к развитию нитрификации данная разность леса займет промежуточное место между Piceetum oxalidosum и Piceeto-Betuletum oxalidosum. По физическим свойствам почвы Piceetum Myrtillaso-oxalidosum мало чем отличаются от почв Piceeto-Betuletum oxalidosum.

Что же касается величины pH, то она наиболее благоприятна для развития нитрификации в этой разности Piceetum oxalidosum.

Опыты с почвами, взятыми под пологом леса, дают накопление нитратов лишь в виде следов. Почвы на лесосеках образуют небольшие количества.

Что касаетси обожженных почв (первое взятие), то они ведут себя сходно с подобными же почвами Picceto-Betuletum oxalidosum, точно так же почти не образуя нитратов. Это подтверждает наше предположение, что в обоих случая искусственное сжигание лесного хлама в больших кучах, в отличие от естественного пожара, который прошел по лесосеке Piceetum oxalidosum, вызывает слишком концентрированное действие огня на почву, что вредно отражается на деятельности нитрифицирующих бактерий, совершенно подавляя ее первое время и ослабляя в дальнейшем (ср. табл. 1, 2 и 3). Вместе с тем мы снова видим, подобно тому, что наблюдалось в опытах с Piceetum-Betuletum oxalidosum, что в результате обжига нитрификационные процессы как бы спустились книзу, появившись в горизонтах A_1 и даже в зачаточном виде в A_2. После естественного пожара такое явление не наблюдалось, несмотря на то, что в верхнем горизонте деятельность нитрифицирующих бактерий была в этом случае несравненно энергичнее. Видимо, нитрифицирующие бактерии действительно способны частично мигрировать вглубь под действием высоких температур в верхнем горизонте. Но возможно также, что вследствие высоких температур происходит более энергичное изменение в благоприятную сторону условий для жизнедеятельности микроорганизмов в ниже лежащих слоях почвы. Последнее же может повести к пробуждению активности нитрификаторов, бывших до тех пор инертными, или же стимулировать деятельность новых пришельцев. Интересно отметить подобное же поведение при искусственных обжиганиях денитрифицирующих бактерий и бактерий маслянокислого брожения (см. 16, стр. 161 и 167).

В этом случае точно так же названные процессы начинают развиваться в тех ниже лежащих горизонтах, где они были раньше слабы или даже не наблюдались вовсе и, таким образом, как бы спускаются в более глубокие слои почвы.

Но как в той, так и в другой серии опытов мы наблюдаем, что такому «углублению» биохимических процессов сопутствует изменение величины pH в сторону щелочности в результате действия огня. Деятельность денитрифицирующих бактерий, так же как и бактерий маслянокислого брожения возникает или усиливается в нижних горизонтах, сопровождаемая поднятием величины pH в среднем с 5.4 до 6.2. Точно так же в разбираемом случае pH значительно повысилось (см. табл. 3).

Таким образом, на ряду с, может быть, действительно существующей активной миграцией бактерий мы здесь, повидимому, встречаемся также с воздействием реакции среды, что, конечно, должно было отразиться на микробиологической жизни почвы.

Piceetum fontinale (табл. 4)

Насаждение смешанное — 5Е + 3Б + 2Ос; возраст 50—70 лет; полнота 0.9; средняя высота 19 м; запас 250—300 м³; бонитет II. Во 2-м ярусе изредка принимает участие *Alnus glutinose* и *Tilia cordata.*

Подрост еловый редкий, удовлетворительного вида. В подлеске: *Sorbus aucuparia* sp., *Rhamnus frangula* sp., *Lonicera Xylostenum* sp., *Acer platanoides* sp., *Ribes nigrum* sol.

Травяной покров.

В лесу:

1-й ярус	*Filipendula Ulmaria*	cop.²
„ „	*Asplenium felix femina*	cop.²
„ „	*Milium effusum, Deshampsia flexuosa*	cop.¹
2-й ярус	*Equisetum silvaticum*	cop.²
„ „	*Rubus saxatilis*	cop.¹
„ „	*Geum rivale*	sp.
„ „	*Paris quadrifolia*	sp.
„ „	*Trientalis europaea*	sp.
„ „	*Aegopodium podagraria*	sp.
3-й ярус	*Asarum europeum*	sp.
„ „	*Majanthemum bifolium*	sp.
4-й ярус	*Oxalis acetosella*	sp.
„ „	Гипновые мхи	sp.
	(Моховой покров очень слабо развит).	

На лесосеке:[1]

1-й ярус	*Filipendula Ulmaria*	cop.²
„ „	Осоки и злаки с преобладанием *Calamagrostis silvatica*	cop.¹
„ „	*Equisetum silvaticum*	cop.¹
„ „	*Vaccinium Vitis Idaea*	un.
„ „	*Asplenium felix femina*	un.

[1] На лесосеках сплошной рубки пышное развитие *Filipendula Ulmaria.*

2-й ярус	*Rubus saxatilis*		cop.[1]
„ „	*Majanthemum bifolium*		sp.
„ „	*Lathyrus pratense*		sp.
„ „	*Paris quadrifolia*		sp.
„ „	*Convallaria majalis*		un.
„ „	*Vaccinium Myrtillus*		un.
„ „	*Caltha palustris*		un.
3-й ярус	*Oxalis acetosella*		sp.
	(Моховой покров очень слабо развит)		

На кострище: Ко времени вторичного взятия образцов кострище, вследствие обильных дождей, было совершенно залито водой и превратилось в болото. Кроме того, пущенный сюда скот настолько перемесил почву, что горизонты были смешаны между собой и трудно различимы. Таким образом, к сожалению, надо считать, что опыты на кострище частично погибли.

В связи со сказанным кострище Piceetum fontinale, в отличие от всех остальных, было покрыто лишь пятнами мхов. Маршанция попадалась изредка, *Potentilla tormentilla* и розетки сложноцветных отсутствовали.

Рельеф — низинная равнина.

Микрорельеф — кочковатый.

Почва — иловато-болотная.

A_0 — 0—3. Подстилка из мхов и неразложившихся листьев хвои и трав.

A_1 — 3—17. Черный, рыхлый, зернистой структуры гумусовый горизонт, средне-суглинистый, сырой.

A_1G 17—27. Серый с темными пятнами, легко суглинистый, пересыщенный влагой. Подстилается серо-палевой глиной.

Табл. 4 знакомит нас с типом леса совершенно иным, чем только что рассмотренный.

Почвы смешанных насаждений с развитым травяным покровом и с почти полным отсутствием в их составе мхов, омываемые текучей водой, представляют собою сочетание условий, во всех отношениях благоприятных для развития нитрификационных процессов. В отличие от Piceetum oxalidosum самый материал для образования гумуса, с преобладанием листьев и трав вместо хвои и мхов, содержит гораздо меньше смолистых и экстрактивных веществ, наличие 5% которых, по мнению Němec'а (13), уже прекращает нитрификацию.

Кроме того, листья и травы в среднем гораздо быстрее разлагаются, чем хвоя и мхи. В присутствии же текучей воды, богатой кислородом, окислительные процессы идут энергично до конечных продуктов распада, не останавливаясь на промежуточных недоокисленных соединениях, получаю-

щихся при разложении органических веществ в условиях недостаточного доступа кислорода и ядовито действующих как на растения, так и на почвенных микробов.

Таким образом, устраняется возможность закисления почвы; закисление же всегда ведет к ухудшению структуры, а следовательно и аэрации и способствует вымыванию питательных веществ (7), что вредно отражается на работе микроорганизмов. Почвы типа Piceetum fontinale почти всегда имеют реакцию, близкую к нейтральной, и действительно в нашем случае во всех 17 исследованных образцах, за исключением одного, реакция не падает ниже 6.0. Это также благоприятствует развитию нитрификационных процессов в почве.

И наконец, принимая во внимание предположение Hesselman'a (12), что одним из главных условий для энергичного протекания нитрификации в почве является наличие в ней электролитов, можно предположить, что значение текучей воды для хода нитрификационных процессов состоит не только в том кислороде, который она с собой приносит, но и в тех вымываемых ею из почвы солях, которые растворены в ней.

Таким образом, в долины и ложбинки, прорезанные мелкими речками и ручьями стекают воды с вымытыми из почвы солями, и почвы подобных лесных участков обогащаются электролитами, чего не наблюдается в лесах, далеко отстоящих от воды.

Табл. 4 служит наглядным подтверждением всего сказанного.

Нитрификация протекает здесь энергично в A_0, резко падает в A_1, (но по сравнению с полевыми почвами идет достаточно интенсивно) и наблюдается в зачаточном виде даже в горизонте A_1G на глубине 27 см.

Мы не видим здесь больших изменений в интенсивности процесса вскоре после рубки (первое взятие образцов). Условия для деятельности нитрифицирующих бактерий, видимо, настолько благоприятны под пологом леса, что действие рубки в данном случае не оказывает быстрого и резкого воздействия. Опыты с почвами после обжига (первое взятие образцов) позволяют нам отметить следующие особенности: нитрификация чрезвычайно усиливается в горизонте A_1, появляется в горизонте A_1G, падает в A_0 в опытах, поставленных с водой, и дает резкий скачок в смысле повышения при условии внесения в ту же почву азотистого удобрения. Все эти данные, как нам кажется, лишний раз подкрепляют те соображения относительно концентрированного действия огня при сжиганиях лесного хлама в кучах на изменение свойств почвы и на возможную миграцию нитрифицирующих бактерий вглубь, которые были высказаны выше (см. стр. 124).

В данном случае работа нитрификаторов, будучи, вообще, очень энергичной, не прекратилась под действием сильного обжига в верхнем горизонте, но лишь значительно упала.

Однако, внесение азотистых веществ, видимо в значительной мере исчезнувших при обжиге, сильнейшим образом стимулировало жизнедеятельность нитрификаторов. Что касается образцов почв, взятых для исследования в конце лета, то можно сказать, что почвы как под пологом леса, так и на лесосеках к осени приобретают несравненно бо̀льшую способность к нитрификации, чем в начале лета. Надо думать, что те причины, которые были выставлены для объяснения этого явления при рассмотрении данных, полученных из опытов с почвами Piceeto-Betuletum oxalidosum (см. стр. 123, 124), имеют место и здесь.

Следует лишь отметить, что по сравнению с Piceetum oxalidosum прогревание почвы в лесу типа Piceetum fontinale будет более энергичным и под кроной деревьев, точно так же, как испаряющая деятельность почвы будет выше вследствие богаче развитого здесь травяного покрова.

Цифры, полученные при исследовании образцов, взятых с кострища к концу лета, резко противоречат всем предыдущим наблюдениям.

Но, как уже говорилось выше (стр. 129), кострище к осени было совершенно испорчено скотом и залито водой, и результаты опытов лишь наглядно подтверждают насколько чувствительно реагируют почвенные микробы на изменение условий их жизни. Даже непродолжительного заболачивания было достаточно, чтобы способность почв к нитрификации упала приблизительно вдвое.

Pinetum callunosum (табл. 5)

Насаждение преимущественно чистое, реже с единичной примесью ели во втором ярусе.

Состав — 10 С + Б + Е; возраст 100 лет; полнота 0.8; средний диаметр 21 см; средняя высота 22 м; запас 300 м³; бонитет III. Подрост сосновый, благонадежный исключительно в окнах. Подлесок редкий из *Alnus incana Sorbus aucuparia, Juniperus communis.*

Растительный покров сложен из следующих представителей.

В лесу:

1-й ярус	*Calluna vulgaris*	cop.¹
„ „	*Vaccinium Mytillus*	sp.
2-й ярус	*Vaccinium Vitis Idaea*	cop.²
„ „	*Melampyrum pratense*	sp.
3-й ярус	*Hypnum* sp.	cop.²
„ „	*Cladonia rangiferina*	cop.¹

На лесосеке:

1-й ярус	*Calluna vulgaris*	sp.
2-й ярус	*Vaccinium Vitis Idaea*	cop.[2]
„ „	*Melampyrum pratense*	sp.
3-й ярус	*Hypnum* sp.	cop.[1]
„ „	*Cladonia rangiferina*	cop.[1]

Единично, на лапах вывороченных деревьев, по опушке леса, около лесосек замечалась *Rubus idaeus*.

Кострище. В качестве такового исследовалось старое кострище, оставшееся после очистки лесосеки в 1925 г., когда лесной хлам сжигался на лесосеке в кучах. Нового сжигания не производилось. Кострище сильно заросло. Растительный покров состоял:

1-й ярус	*Epilobium angustifolium*	cop.[1]
„ „	*Bromus* sp.	un.
2-й ярус	*Calluna vulgaris* (появляется по периферии кострища)	sp.
„ „	*Agrostis vulgaris*	un.
3-й ярус	*Vaccinium Vitis Idaea* (пятнами по периферии кострища)	cop[1]
4-й ярус	Мхи и лишайники (больше в центре кострища)	sp.

Кроме того, образцы почв были взяты из под старой кучи сложенного ранее лесного хлама. Ко времени взятия образцов почти вся куча успела сгнить за исключением небольших остатков. Растительность здесь отсутствовала.

Образцы почв со всех мест были взяты лишь один раз 1 VIII; повторного взятия не производилось.

Рельеф — бугристо-холмистый, дюнные всхолмления и береговые валы.

Почва — средне-оподзоленная, супесчаная на валунных суглинках.

A_0 0—2 (4). Лесная подстилка из неразложившихся растительных остатков.
A_1 не выражено.
A_2 2 (4)—14. Серо-коричневатый, окрашенный гумусовыми подтеками, песчаный.
B_1 14—45. Ржавого цвета с более темными ржавыми пятнами, мелко песчаный.

Залегает на красной глине с включением валунов известняка. Вскипает с глубины около 180 см.

Нитрификация не развивается в почвах из-под леса типа Pinetum callunosum. Ни рубка, ни смешение с гниющими лесными остатками не вызывает появления в почвах этого процесса. В лучшем случае в опытах можно отметить накопление едва учитываемых количеств нитратов.

Огонь пробуждает деятельность нитрифицирующих бактерий, и мы наблюдаем развитие нитрификации в почвах, взятых с кострища.

Как уже указывалось выше, лесосека подверглась огневой очистке в 1925 г., образцы же были взяты в 1930 г.

Таким образом, пятилетняя давность, может быть, и ослабила, но во всяком случае не прекратила влияния огня на почву. Нитрификация развивается как в A_0, так и в A_2 до глубины 10 см.

Что касается растительного покрова, то он также до сих пор несет следы прошедшего по этой почве огня — мы видим на кострищах в больших количествах *Epilobium angustifolium*, который в то же время является показателем наличия нитратов в почвах.

И наконец pH еще и через пять лет имеет на кострище величину 6.8 для A_0 и 6.25 для A_2 вместо 4.2 и 5.9 для соответствующих горизонтов, взятых из-под полога леса. Появление нитрификационных процессов после действия огня в лесных почвах типа Pinetum callunosum интересно как показатель интенсивности этого воздействия.

Тип леса Pinetum callunosum с кислым pH и с растительным покровом почти исключительно из мхов, *Cladonia rangiferina* и *Calluna vulgaris*, сочетает в себе наиболее неблагоприятные условия для развития нитрификационных процессов. Образующаяся при этом подстилка содержит в себе очень много смолоподобных и других экстрактивных веществ (например, до 18% в хвое сосны — 13), которые препятствуют развитию нитрификации. Точно также кислое pH задерживает жизнедеятельность нитрифицирующих бактерий.

Что касается *Cladonia rangiferina*, то этот лишайник, подобно *Hypnum* и *Hylocomium* из мхов, поглощает необходимую ему влагу из атмосферного воздуха, а не из почвы.

Таким образом, покров из упомянутых растений способствует возникновению не восходящих, как нормально, токов воды в почве вследствие испарения, а, наоборот, нисходящих. Последнее ведет к выщелачиванию почвы и еще более уменьшает количество солей в почвенном растворе.

И все же, несмотря на сочетание всех таких крайне неблагоприятных условий для развития нитрификации, благотворное действие огня перевешивает их и ясно сохраняется еще и через 5 лет, после того как была произведена огневая очистка леса. Следует, кроме того, отметить чрезвычайное усиление нитрификации при внесении в почвы Pinetum callunosum как лупиновый муки, так и сернокислого аммония. Как уже указывалось выше (стр. 122), эта особенность сближает почвы Pinetum callunosum с почвами из-под Piceetum oxalidosum и заставляет искать причину этого явления в каких-то общих свойствах этих почв.

Из всех исследованных нами типов леса гумус почв Pinetum callunosum наиболее трудно разложим (см. стр. 113) и следовательно наименее доступен микроорганизмам в качестве питания.

Гумус Piceetum oxalidosum занимает в этом смысле следующее место за Pinetum callunosum, имея в своем составе из всех разностей Piceetum oxalidosum наибольшее количество мхов и хвои.

При внесении в почву лупиновой муки микроорганизмы получают в избытке легко доступный материал для аммонификации и последующей нитрификации аммонийных солей; сернокислый же аммоний может сразу окисляться нитрифицирующими бактериями в азотную кислоту. Отсюда понятно то влияние, которое может оказать на ход нитрификации внесение в почву подобных удобрений. Это действие будет тем сильнее, чем меньше имеется в гумусе данной почвы азотсодержащих веществ, доступных микроорганизмам для разложения.

Действительно, в наших опытах мы наблюдали такую градацию. При внесении лупиновой муки нитрификация усиливается: в Pinetum callunosum приблизительно в 10 раз, в Piceetum oxalidosum более чем в $1^1/_2$ раза, тогда как в Piceetum Myrtilloso-oxalidosum увеличение происходит всего приблизительно на $37^0/_0$, а в Piceeto-Betuletum oxalidosum даже только на $20^0/_0$. Кажущееся противоречие в случае Piceetum fontinale (кострище, первое взятие) можно объяснить тем, что первое время после сильного обжига почва особо обеднена сгоревшим органическим веществом.

Таким образом, наблюдая за тем, как отражается на деятельности нитрифицирующих бактерий внесение в почву лупиновой муки, мы можем судить о свойствах гумуса данной почвы.

Что касается сернокислого аммония, то его действие во всех исследованных нами случаях никогда не превосходит действия лупиновой муки — большею же частью оно, как действие соли физиологически кислой, даже слабее и иногда довольно значительно.

Отсюда мы можем заключить, что работа аммонификаторов в наших почвах достаточно интенсивна, и что главным тормозом для деятельности нитрифицирующих бактерий в тех случаях, когда они имеются в почвах, служит бедность почв доступным для разложения микроорганизмов органическим веществом.

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРОИЗВЕДЕННЫХ ОПЫТОВ

Заканчивая описание наших опытов, мы позволим себе для большей наглядности и более удобного сравнения результатов произведенного иссле-

дования, данные отдельных таблиц относительно потенциальной способности исследованных почв к нитрификации свести в одну общую схематизированную табл. 7.

Табл. 7 позволяет нам разбить почвы исследованных типов леса на следующие категории:

1) Насаждения, почвы которых неспособны к нитрификации ни под пологом леса, ни после рубки. Это будут чистые сосновые леса с растительным покровом почти исключительно из вереска, лишайников и мхов (Pinetum callunosum).

2) Насаждения с почвами, неспособными нитрифицировать органический азот под пологом леса, но приобретающие эту способность в некоторых случаях под влиянием рубки. Сюда относится лес типа Piceetum oxalidosum.

В тех случаях, когда они имеют смешанный состав с примесью березы и осины и растителъный покров, в котором замечается наличие нитратофильных растений, а также, когда они заселяют почвы с благоприятными физическими свойствами, они приобретают под действием рубки способность к нитрификации (Piceeto-Betuletum oxalidosum).

3) Насаждения, способные к энергичной нитрификации. Сюда относятся смешанные леса типа так называемого «ручейникового ельника» — Piceetum fontinale, расположенные по берегам маленьких речек и ручьев.

Эти леса, омываемые текучей водой, характеризуются богато развитым растительным покровом с наличием нитратофильных растений в составе последнего и полным, или почти полным, отсутствием мхов.

На почвы всех трех перечисленных категорий лесных насаждений огонь действует в совершенно одинаковом направлении, стимулируя их способность к нитрификации — в некоторых случаях пробуждая, в других усиливая нитрификационную деятельность почв. Наблюдается разница в величине производимого огнем эффекта, точно так же нитрификация появляется через разные промежутки времени после прошедшего по лесу огня. Более умеренное обжигание почвы, видимо, более благотворно в этом смысле и производит более быстрый эффект, давая и в дальнейшем значительно бо̀льшие накопления нитратов, чем при сильных обжигах (сравни Piceetum oxalidosum, Piceeto-Betuletum oxalidosum и Piceetum Myrtilloso-oxalidosum).

Сравнение данных химического анализа с данными относительно потенциальной способности исследованных почв и нитрификации

К сожалению приходится отметить, что рассмотрение этого материала не дает возможности установить зависимость между теми или иными химическими свойствами почв и способностью их к нитрификационным процессам.

Мы можем сказать, что все A_0 по сравнению с другими горизонтами отличаются бо̀льшим процентным содержанием органического вещества, бо̀льшими количествами азота, водно-растворимых гумуса и CaO, но это в одинаковой мере относится как к тем A_0, где идет нитрификация, так и к тем, где она не развивается. Точно так же бо̀льшая щелочность некоторых почв не всегда связана с развитием в этих почвах процесса нитрификации. Таким образом, в данном случае не является возможным установить какую-либо закономерность между изменениями в химизме исследованных почв и их способностью к минерализации органического азота.

Конечно, весьма вероятно, что жизнедеятельность бактерий определяется не преимущественно химическими, а и другими свойствами почвы; тем не менее трудно было ожидать отсутствия связи между химизмом и бактериальной жизнью почвы в той мере, как это обнаружилось в описанных опытах. В виду этого дополнительные изыскания в этой области нам представлялись бы весьма желательными.

Изменение интенсивности процесса нитрификации под влиянием смешения гумуса с минеральной почвой

Вопрос о том влиянии, которое оказывает на интенсивность нитрификации смешение гумуса с минеральной почвой был поднят в литературе Hesselman'ом. Hesselman указывал, что нитрификация усиливается в результате подобного смешения вследствие того, что гумус обогащается солями.

По мнению же Hesselman'а количество электролитов в почве в значительной мере определяет способность почв к нитрификации (12).

Так, Hesselman указывает, что нитрификация в лесных почвах идет успешно всюду, куда стекают воды, несущие с собою соли. Это относится к лесам, расположенным по долинам мелких речек и ручьев (см. стр. 130); в равной мере нитрификация развивается успешно в почвах низовых болот (Niederungsmoore), если они представляют собою пространства, покрытые тонким слоем проточной воды, которая несет с собою вымытые из почвы соли. Точно так же дренаж лесных почв, осушая почвы, повышая их аэрацию и способствуя тем самым минерализации лесной подстилки и следова-

тельно накоплению солей в почве, усиливает нитрификационные процессы в почве. Обобщая же выводы Hesselman'a, мы можем сказать, что все процессы, ведущие к выщелачиванию почвы, повлекут за собой затухание нитрификационных процессов. Но нам кажется уместным заметить, что усиленное снабжение почв солями сопровождается во всех указанных случаях и другими факторами, которые сами по себе могут благоприятствовать нитрификационным процессам в почвах. Текучая вода является богатым источником кислорода. Это обстоятельство способствует лучшей аэрации почвы, которая сама по себе благоприятствует развитию нитрифицирующих бактерий. Вместе с тем, вытекающая отсюда лучшая окислительная деятельность почв должна в свою очередь отразиться на величине pH в смысле ее повышения. Последнее же влечет за собой улучшение физических свойств почвы. Таким образом, нам кажется весьма вероятным, что мы имеем здесь дело с комбинированным действием многих факторов. Не следует также забывать о возможности каталитических воздействий, на что уже указывалось выше (см. стр. 117, 118).

Свое утверждение, что смешение гумуса с минеральной почвой ведет к усилению нитрификации, Hesselman базировал, главным образом, на наблюдениях, что при ветровалах, когда происходит подобное смешение, в лесах, на лапах вывороченных деревьев очень часто вырастает такое нитрофильное растение, как малина. Подобные случаи отмечены и в наших исследованиях (см. стр. 126). Точно также по Hesselman'y (19) сосны растут лучше на лесосеках, где благодаря человеку и скоту поверхность гумуса нарушена, и гумус несколько смешан с минеральной почвой.

Все сказанное возбудило желание проверить приведенную гипотезу Hesselman'a экспериментально в лабораторных условиях, наблюдая за изменением потенциальной способности почв к нитрификации при смешении почвы горизонта A_0 с почвой нижележащих слоев. Полученные результаты сведены в таблицу 6.

Приведенный в табл. 6 цифровой материал, конечно, слишком незначителен, чтобы на основании его делать какие-либо окончательные выводы, но все же он позволяет наметить следующие положения:

1) Смешение подстилки с минеральной почвой часто ведет к значительному увеличению нитрификационной способности почв вообще в этом смысле активных (опыты 6 и 7). Непонятное исключение в этом смысле составляет опыт 8.

2) В большинстве случаев, когда мы имеем дело с почвами, неспособными к нитрификации до обжига, смешение подстилки с минеральной

почвой не оказывает никакого влияния на ход нитрификации в почвах (опыты 1, 4 и 5). Точно так же наблюдался случай, когда слабая нитрификационная деятельность почвы до обжига усилилась под влиянием смешения подстилки с минеральной почвой на такую незначительную величину, что это увеличение лежит в пределах точности метода исследования (опыт 2).

3) В некоторых случаях лишь совместное действие обжига и смешения вызывает нитрификационные процессы в почве (опыт 3).

Таким образом, поскольку произведенные опыты позволяют нам делать некоторые обобщения относительно исследованных типов леса, мы можем сказать, что механическая обработка лесных почв, при которой происходит смешение гумуса с минеральной почвой, видимо, далеко не во всех случаях вызовет усиление нитрификации и окажется в этом смысле благоприятной. Повидимому, в лесных насаждениях, склонных к нитрификации (смешанные леса с травяным покровом), такая обработка должна усилить ее и иногда очень значительно, в то время как в чистых хвойных лесах с преобладанием мохового покрова, где в большинстве случаев нитрификация отсутствует, механическая обработка не окажет в этом смысле никакого влияния. Здесь нужно более сильное воздействие в виде огня, а иногда, может быть, и совместное воздействие обоих факторов для поднятия нитрификационной способности почв.

Нитрификационная деятельность почв и лесовозобновление

Hesselman считает, что для хвойных лесов, в отличие от лиственных пород, способность почв к нитрификации не является необходимым условием хорошего роста и успешного возобновления (18).

Как сосна, так и ель прекрасно утилизируют в виде азотистого питания аммиак, а, может быть, при помощи микориз и органические азотсодержащие вещества лесной подстилки и дают хороший прирост на почвах, неспособных к нитрификации. Но все же Hesselman находит, что все леса, при прочих равных условиях, лучше растут при наличии в почвах нитрификационных процессов (12). Другие авторы, как, например, Weiss (24), указывают на параллелизм между количеством нитратов в почвах и ростом леса и приводят наблюдения, что ель будто бы страдает от недостатка нитратов. В своей более поздней работе Hesselman (25) дает описание интересных опытов, которые он производил с выращиванием молодняка хвойных деревьев на грубом гумусе (Rohhumus), неспособном к нитрификации.

Hesselman заражал этот исходный материал почвой, способной к нитрификации и наблюдал, что в тех случаях, когда «Rohhumus» при заражении

нитрифицирующими бактериями оказывался способным в дальнейшем поддерживать их жизнедеятельность и вырабатывать нитраты, вырастали крепкие растения с хорошо развитой корневой системой. В противном случае получались слабые формы с плохо развитыми микоризами.

Однако, на ряду с этим взглядом Hesselman'а и других примыкающих к нему авторов, мы имеем в литературе указания, сопоставление которых может привести к несколько иным заключениям.

В основном они сводятся к следующим положениям:

1) Некоторые леса (видимо большинство хвойных) очевидно нуждаются в кислом pH для успешного развития (26). Во всяком случае для некоторых пород деревьев низкое pH не является фактором, задерживающим их развитие и, наоборот, косвенно способствует ему, так как исключает возможность успешного роста тех конкурентов, которые не переносят низкого pH. Так, например, оптимум для роста сосны лежит при pH = 4.0 (11). Насколько же важное значение для роста растений имеет подходящая реакция почвы, можно судить по тому, что, лишь подобравши соответствующее pH, удалось искусственно вывести многие растения (например, чернику), которые до тех пор росли лишь дикими и не поддавались культуре (27, 28, 29).

2) В кислых почвах разложение подстилки идет по преимуществу с образованием аммиака (27). Видимо, аммиак в таких почвах заменяет для растений недостающие нитраты (27, 28 и 12).

3) В литературе имеются указания, что внесение в лесные почвы в виде удобрения чилийской селитры ведет к усреднению реакции и вредно отражается на росте хвойных насаждений, предпочитающих кислое pH (30 и 31). Повидимому, образование нитратов в почвах также сопровождается изменением величины pH в сторону щелочности в силу того, что нитраты являются физиологически основными солями, и растения по преимуществу поглощают анион NO_3, оставляя основания в почве.

Наоборот, увеличение количества аммонийных солей, физиологически кислых, делает pH почвы более кислым.

4) Хвойные деревья могут утилизировать в качестве азотистого питания аммонийные соли (12, 31, 32 и 33). Некоторые авторы считают даже, что в то время как лиственные породы и травы предпочитают нитраты (31) (они же нуждаются и в более нейтральном pH), хвойные деревья являются по терминологии Hesselman'а «Ammoniakpflanzen» и утилизируют предпочтительные аммиачные соединения.

Интересно отметить, что в полном соответствии с приведенными данными, косвенно подтверждая их этим, находятся наблюдения, что почвы,

покрытые лиственными лесами, отличаются несравненно более энергичной способностью к нитрификации, чем почвы хвойных лесов. В последних нитрификация чаще всего отсутствует, или наблюдается в тех случаях, когда к хвойному насаждению примешиваются лиственные породы.

На основании всего сказанного мы можем притти к заключению, что способность почв к нитрификации, повидимому, не является безусловно решающим моментом в жизни каждого типа леса.

Повидимому, для лиственных и смешанных насаждений (например, в нашем случае для леса типа Piceetum fontinale) повышение нитрификационной способности почв будет, вероятно, благоприятствующим фактором, так как при этом увеличивается количество тех азотистых соединений, которые, видимо, наилучшим образом утилизируются деревьями и кроме того усредняется реакция почвы.

Что же касается хвойных лесов, то здесь усиление нитрификации, видимо, не будет играть первенствующей роли. Не создавая для хвойных деревьев особых преимуществ в смысле азотистого питания, повышение нитрификации в некоторых случаях, может быть, даже скорее ухудшит условия их существования, изменяя pH почвы в сторону щелочности и создавая менее элективные условия для их развития.

Именно, создадутся условия несравненно более благоприятные для роста трав[1] и развития корневых отпрысков лиственных пород, единично встречающихся в составе хвойных лесов.

Таким образом, получится положение, при котором конкуренты елового и соснового подростка будут поставлены в лучшие условия, чем самый молодняк хвойных деревьев, и в некоторых отдельных случаях такая конкуренция, возможно, станет фатальной для всходов сосны и ели.

Однако, лесоводам известны сложные соотношения в лесных сообществах с борющимися в них за преобладание различными растительнымм типами. Те или иные новые заселенцы являются на освободившиеся участки в зависимости от того, которые из них имеются поблизости с гарями, а их вред или польза в значительной мере определяются в дальнейшем не качественными, а количественными соотношениями различных пород растений. Довольно часто наблюдаемое массовое надвигание *Calamagrostis silvatica* из «окон» леса на гари, конечно, в большинстве случаев поведет к гибели возникающего самосева хвойных деревьѐв, и в этом случае усиление нитрифи-

[1] В нашей области на лесосеках в массовом количестве развиваются преимущественно или *Calamagrostis silvatica* или *Epilobium angustifolium*.

кации окажется пагубным для лесовозобновления, благоприятствуя развитию *Calamagrostis*; с другой стороны, умеренное развитие нитратофильного *Epilobium angustifolium* будет способствовать росту молодняка хвойных, служа прикрытием для молодых всходов.

Но, во всяком случае, приведенные лесоводственные соображения заставляют нас с особой осторожностью отнестись к оценке усиления нитрификации как фактора, определяющего то или иное развитие леса после обжига, вследствие чего какие-либо решительные заключения по данному вопросу с нашей стороны вряд ли были бы у места.

Заключение

1) Наблюдается тесная зависимость между составом насаждения и способностью почв к нитрификации.

Почвы лесов типа Pinetum callunosum и Piceetum oxalidosum неспособны к нитрификации.

Наоборот, почвы лесов Piceetum fontinale энергично нитрифицируют азот подстилки.

2) Рубка не оказывает действия на интенсивность нитрификационных процессов в лесах типа Pinetum callunosum и лишь очень незначительное в лесах типа Piceetum fontinale.

В лесах типа Piceetum oxalidosum способность к нитрификиции приобретается под влиянием рубки в отдельных благоприятных случаях.

3) Огонь постоянно действует стимулирующим образом на нитрификационные процессы в лесных почвах. После действия огня нитрификация возникает в тех почвах, где она до тех пор не наблюдалась и значительно усиливается там, где она проявлялась и до обжига.

4) Умеренное обжигание почвы влияет на нитрифицирующую способность почв благоприятнее, чем сильное.

5) В отдельных случаях, при умеренном обжигании, способность почв к нитрификации проявляется непосредственно после самого обжига (уже на 2-й день, см. Piceetum oxalidosum).

6) Произведенные опыты позволяют отметить сохранение действия огня на почвы в течение 5 лет.

7) Во всех случаях способность почв к нитрификации максимально проявлялась осенью.

8) Огневая очистка лесосек ведет к возникновению или усилению нитрификации в лесных почвах, что вполне согласуется с п. 3.

9) Беглый огонь, видимо, будет благоприятнее отражаться на усилении нитрификации, чем сжигание лесного хлама в кучах (см. стр. 124, 127).

10) Механическая обработка лесных почв при условии правильного проведения ее, т. е. при условии действительного перемешивания подстилки с минеральной почвой может способствовать усилению нитрификационных процессов в почве.

11) Повышение нитрификационной деятельности почвы, судя по литературным данным, видимо, сильнее благоприятствует росту трав и лиственных пород деревьев, чем росту хвойного насаждения; не будучи обязательным для питания хвойных пород, усиление нитрификации может в некоторых отдельных случаях косвенно сказаться для последних скорее даже вредным, так как стимулирует преимущественное развитие их конкурентов. Однако, для решительного суждения по этому вопросу одних данных относительно нитрификации недостаточно.

В заключение позволю себе заметить, что все сделанные здесь выводы основаны на работе одного года. В силу этого они не могут считаться окончательными, и совершенно очевидно, что нужны длительные наблюдения над одними и теми же объектами в течение целого ряда лет. В особенности такую осторожность следует проявить по отношению к практическим выводам и делать их на основании однолетнего опыта было бы с нашей стороны чрезвычайной смелостью. Мы однако полагаем, что уже проделанная работа дает нам право с настойчивостью указывать на микробиологический метод как на совершенно необходимое звено в той цепи исследовательских работ, посредством которых мы в конце концов не только познаем лес, но и научимся властно управлять его жизнью.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. М. Е. Ткаченко за просмотр и замечания по существу настоящей работы, а также за неизменный живейший интерес к теме настоящего исследования.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Шульгина, О. Г. К вопросу о микроскопическом изучении микробиологического населения почвы. Тр. отд. с.-х. микробиологии, Л., т. II, 1927.
2. Степанова, М. Л. Материалы к количественному подсчету бактерий в почве по методу Виноградского. Тр. отд. с.-х. микробиологии, Л., т. III, 1928.
3. Германов, Ф. Н. Основное направление в изучении микробиологических свойств чернозема Носовской с.-х. опытной станции. Изд. Носовской с.-х. опытной станции, вып. 79, 1927.
4. Kvapil, K. und Němec, A. Beitrag zur Frage des Einflusses reiner Fichten und Buchenbestande sowie durch beide Holzarten gebildeter Mischbestände auf einige Eigenschaften der Waldböden. Zeitschr. f. Forst- und Jagdwesen, 1925.
5. Němec, A. und Kvapil, K. Über den Einfluss verschiedener Waldbestände auf den Gehalt und die Bildung von Nitraten in Waldböden. Zeitschr. f. Forst- und Jagdwesen, 1927.
6. Худяков. Сельско-хозяйственная микробиология, 1926.
7. Süchting, H. Der Abbau der organischen Stickstoffverbindungen des Waldhumus durch biologische Vorgänge. Zeitschr. f. Pflanzenernährung und Düngung l, 113, 1923.
8. Süchting, H. Der Abbau der organischen Stickstoffverbindungen des Waldhumus durch biologische Vorgänge. Forstwissenchaft. Centralbl., 1925.
9. Grosskopf. Wie verändern sich stofflich und morphologisch die Fichtennadeln bei Bildung von Auflagehumus in geschlossenen Fichtereinbestände? Tharandt. Förstl. Jahrb. 79, 343, 1928.
10. Funk. Neuere Fragen aus der Bodenbiologie des Waldes. Forstwissensch. Centralbl., 1927.
11. Němec, A. und Kvapil, K. Studien über einige chemische Eigenschaften der Profile von Walböden. Zeitschr. f. Forst- und Jagdwesen, 1926.
12. Hesselman, H. Studien über die Nitratbildung in natürlichen Böden und ihre Bedeutung in pflanzenökologischer Hinsicht. Medd. fran Statens Skogsförsöksanstalt. Bd. I, 1917.
13. Němec, A. Beiträge zur Kentniss der chemischen Vorgänge bei der Humuszersetzung im Walde. Forstwissenschaft. Centralbl., 1929.
14. Melin. Untersuchungen über die Baummykorhiza. Jena, 1925.
15. Feher, D. Mikrobiologische Untersuchungen über den Stickstoffkreislauf des Waldbodens. Archiv für Mikrobiologie, Bd. I, H. 3, Verlag J. Springer, Berlin, 1930.
16. Сушкина, Н. Н. К микробиологии лесных почв в связи с действием на них огня. Сб. статей «Исследования по лесоводству», изд. Сельхозгиз, 1931.
17. Olsen Carsten. Studier over Jordbundens Brintionkoncentration. København, 1921.
18. Hesselman, H. On the effect of our Regeneration Measures on the formation of Salpetre in the ground and its Importance in the Regeneration of coniferous Forests. Medd. fran Statens Skogsförsöksanstalt, Bd. II, 1916—1917.
19. Hesselman, H. Studien über die Verjüngungsbedingungen der norrländischen Kieferheiden. Medd. fran. Statens Skogsförsöksanstalt. Bd. II, 1916—1917.
20. Gopal Rao, G. and Dhar, N. R. Photosensitized Oxidation of Ammonia and Ammonium Salts and the Problem of Nitrification in Soils. Soil Science, vol. 31, No 5, May 1931.
21. Geilmann. Distribution of titanium in soils and plants. Jour. Ladw., 68, 107—124, 1920.
22. Koch, A. Über die Einwirkung des Laub-und Nadelwaldes auf den Boden und die ihn bewohnenden Pflanzen. Zentralbl. f. Bact., II Abt, Bd 41, 545—571, 1914.
23. Feher, D. Untersuchungen über den zeitlichen Verlauf der Mikrobentätigkeit im Waldböden. Archiv für Mikrobiologie, Bd. I, Hf. 3, Verlag J. Springer, Berlin, 1930.
24. Weiss, F. D. Über Vorkommen und Bildung der Salpetersäure in Wald-und Heideboden. Zentralbl. f. Bact. 28, 434, 1910.

25. Hesselman, H. Studien über die Entwickelung der Nadelbaumpflanzen in Rohhumus. 1926—1927.
26. Frank, E. Über Bodenazidität im Walde. Zeitschr. für Forst-und Jagdwesen, 1927.
27. Arrhenius, O. Ökologische Studien in den Stockholmer Schären. Stockholm, 1920.
28. Olsen, C. Studies on the hydrogen ion concentration of the soil and its significance to the vegetation especially to the natural distribution of plants. Comptes rendus Labor Carlsberg, 15, Nr. I, Copenhagen, 1923.
29. Atkins, W.R.G. Relation of the hydrogen ion concentration of the soil to plant distribution. Nature, 108, 80, 1921.
30. Ehrenberg. Die Bewegung des Ammoniakstickstoffes in der Natur. Berlin, 1907.
31. Vater, H. Bemerkung zur Stickstoffaufnahme der Waldbäume. Tharadter Förstliches Jahrbuch, 59, 261, 1909.
32. Kocb, A. und Oelsner, A. Einfluss von Fichtenharz auf den Stickstoffhaushalt des Bodens. Zentralbl. f. Bact., II, 1916.
33. Aaltonen, V. T. Über die Umsetzungen der Stickstoffverbindungen im Waldboden. Commun. ex instituto quest. forest. Finlandia edit. 10, Helsinki, 1926.
34. Ткаченко, М. Е. Очистка лесосек. Сельхозгиз, Л., 1931.
35. Балашов, А. Н. Влияние реакции среды на произрастание и первые стадии развития ели и сосны. Из раб. ст. физиол. культ. раст. Сообщ. № 8. Изд. Лен. с.-х. инст., Детское Село, 1928.

N. N. SUSHKINA. LA NITRIFICATION DANS LES SOLS DE FORÊTS ET SA DÉPENDANCE DE LA PLANTATION, DE L'ABATTAGE ET DU NETTOYAGE PAR IGNITION

RÉSUMÉ

1. Une dépendance bien nette se fait remarquer entre la plantation et la nitrification des sols de forêts. Les sols de forêts — Pinetum callunosum et Piceetum oxalidosum — ne manifestent aucune nitrification. Au contraire les sols de Piceetum fontinale sont caractérisés par une nitrification bien énergique.

2. L'abattage ne produit aucun effet sur l'intensité du procès de nitrification dans les sols de Pinetum callunosum; l'effet est exigu dans Piceetum fontinale. Quant aux forêts Piceetum oxalidosum, la nitification paraît y être quelquefois stimulée par l'abattage.

3. L'ignition stimule constamment la nitrification dans les sols de forêts. L'ignition provoque la nitrification dans les sols où ce procès ne fut pas constaté auparavant et elle le renforce dans les cas où il n'était marqué que très faiblement.

4. Une ignition modérée du sol paraît plus favorable au procès de la nitrification qu'une ignition énergique.

5. L'ignition modérée du sol provoque dans quelques cas immédiatement la nitrification (en deux jours dans le cas du Piceetum oxalidosum).

6. Nos expériences permettent de constater l'existence de l'effet de l'ignition après cinq années.

7. La nitrification est toujours maximum en automne.

8. Le nettoyage de forêts par ignition provoque ou renforce la nitrification. Ce fait est d'accord avec les thèses du § 3.

9. Une ignition courante paraît favoriser la nitrification plus vigoureusement qu'une combustion des restes entassés de l'abattage.

10. En cultivant les sols de forêts d'une manière correcte c'est à dire en entremêlant le sol minéral avec la couche supérieure on favorise la nitrification dans un degré perceptible.

11. L'élévation de la nitrification du sol semble, selon quelques données littéraires, favoriser la croissance de l'herbage et des espèces feuillues, au dépit des arbres aux feuilles aciculaires; la nitrification élevée sans être nécessaire à la nutrition de ces dernières peut quelquefois leur devenir indirectement plutôt nuisible en stimulant de préférence le developpement de leur concurrents. Mais nous ne cousidérons pas les données sur la nitrificaton comme suffisantes pour une conclusion décisive sur ce sujet.

P I C E E T U M

Потенциальная способность почв к нитрификации в лесу и на лесосеке до и после обжига. Количество
в лесу 16 VI; на лесосеке и на кострище

Место взятия образцов, № разреза, горизонт и глубина в см				Контроль							
				Гигроскопическая влага	Влагоемкость на сухую почву	pH электр. Актуальн. кислотн.	pH электр. Обменн. кислотн.	pH водн. выт. (колорим.)	Азот NO_3	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)
			A_0 0—5	9.72	273.30	4.2	3.4	6.0	0	след.	+++
Первое взятие образцов	17	Лес	A_1+A_2 5—10	1.58	47.07	4.15	2.8	6.5	0	»	+++
			A_2 10—20	0.99	34.84	4.55	3.8	6.5	0	»	0
			A_0 —	—	—	—	—	—	—	—	—
	18	Лесосека	A_1+A_2 2—10	1.67	37.64	4.6	2.6	6.3	след.	0	—
			A_2 10—20	0.88	27.15	5.35	3.7	6.3-6.4	0	0	—
			A_0 0—2	4.04	96.92	6.5	5.6	—	ясн. след.	0	—
	19	Кострище	A_1+A_2 2—10	1.08	34.66	4.95	3.2	6.3	неб. след.	неб. след.	—
			A_2 10—20	0.68	26.09	4 95	3.8	6.4	0	»	—
			A_0 0—3	10 89	285.50	4.15	3.4	5.2	0	след.	+++
	117	Лес	A_1+A_2 3—10	2.71	54.48	4.3	2.9	6.3	0	»	0
			A_2 10—20	0.96	27.16	4.70	3.7	6.6	0	»	0
			A_0 0—3	3.71	—	5.2	4.1	—	0	неб. след.	—
Повторное взятие образцов	118	Лесосека	A_1+A_2 3—10	1 98	47.49	4.35	3.15	6.3	0	»	—
			A_2 10—20	0.88	27.54	4.95	3.8	6.4	0	»	—
			A_0 0—2	7.26	—	6.2	5.0	—	1.23	след.	—
	119	Кострище	A_1+A_2 2—10	1.61	48.93	4.5	3.2	6.3	ничт. след.	неб. след.	—
			A_2 10—20	0.86	30.36	4.75	4.0	6.5-6.6	0	»	—

Таблица 1

O X A L I D O S U M

итратного азота в мг на 100 г сухой почвы. Пожар прошел по лесосеке 16 VI. Первое взятие образцов:
3 VI. Повторное взятие образцов 26 IX.

Опыт														
Вода					Лупиновая мука					$(NH_4)_2SO_4$				
рН водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	рН водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	рН водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3
6.8	слаб. след.	+	0	0	6.9	слаб. след.	+	0	0	6.7	слаб. след.	+	0	0
6.5	»	0	0	0	6.6	»	0	0	0	6.4	»	+	0	0
6.6	»	0	0	0	6.8	»	0	0	0	6.6	»	+	0	0
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.4	—	—	0	0	6.5–6.6	—	—	ничт. след.	0	6.0	—	—	дов. ясн.сл.	0
6.4	—	—	0	0	6 6	—	—	0	0	6.0	—	—	0	0
—	—	—	0.50	0.50	—	—	—	0.72	0.72	—	—	—	0.51	0.51
.4–6.5	—	—	ничт. след.	0	6.6	—	—	неб. след.	0	6.0	—	—	ничт. след.	0
6.4	—	—	0	0	6.6	—	—	0	0	6 0	—	—	0	0
—	слаб. след.	+	0	0	—	слаб. след.	+	0	0	—	слаб. след.	+	0	0
6.6	»	0	0	0	6.7	»	слаб. след.	0	0	6.4	»	+	0	0
6.6	»	—	0	0	6.7	»	»	0	0	6.7	»	+	0	0
—	—	—	след.	след.	—	—	—	ничт. след.	0	—	—	—	ясн. след.	0
6.8	—	—	0	0	6.9	—	—	0	0	6.8	—	—	0	0
6.8	—	—	0	0	7.0	—	—	0	0	6.8	—	—	0	0
—	след.	—	36.25	35.02	—	след.	—	59.41	58.18	—	след.	—	59.19	57.96
6.9	—	—	0	0	7.0	—	—	ничт. след.	0	7.0	—	—	0	0
6.5	—	—	0	0	7.0	—	—	»	ничт. след.	6.7–6.8	—	—	0	0

PICEETO-BETULE

Потенциальная способность почв к нитрификации в лесу и на лесосеке до и после обжига. Количество
7 VI; на лесосеке 7 VI и на ко

Место взятия образцов, № разреза, горизонт и глубина в см				Контроль							
				Гигроскопическая влага	Влагоемкость на сухую почву	pH электр.		pH водн. выт. (колорим.)	Азот NO_3	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)
						Актуальн. кислотн.	Обменн. кислотн.				
Первое взятие образцов	12	Лес	A_0 0—3	4.15	85.26	4.90	—	—	след.	0	0
			A_1 3—10	1.86	35.46	5.20	3.5	6.4	ничт. след.	0	0
			A_2B 10—18	1.77	33.43	5.25	3.9	6.4	0	0	0
	11	Лесосека	A_0 0—3	4.18	86.46	5.10	—	6.4	очень немн.	след.	0
			A_1 3—10	1.77	37.51	5.00	3.9	6.3	неб. след.	0	0
			A_2B 10—18	1.58	31.99	5.05	3.9	6.5	0	0	0
	10	Кострище	A_0 0—2	4.42	82.91	6.55	5.6	—	неб. след.	след.	—
			A_1 2—10	1.79	33.87	5.2	4.3	6.4	0	неб. след.	—
			A_2B 10—18	1.60	31.75	5.3	4.2	6.4	0	»	—
Повторное взятие образцов	112	Лес	A_0 0—3	5.21	—	5.10	4.1	—	чрезв. немн.	след.	++
			A_1 3—10	—	—	4.85	3.7	—	—	—	—
			A_2B 10—18	1.61	28.81	5.10	3.86	6.4	0	0	0
	111	Лесосека	A_0 0—3	4.46	—	5.72	4.6	—	очень немн.	след.	++
			A_1 3—10	1.89	31.19	5.12	3.7	6.4	ничт. след.	0	0
			A_2B 10—18	1.75	29.58	5.05	3.6	6.4	0	0	0
	110	Кострище	A_0 0—2	5.64	—	7.52	6.5	—	0.05	немн.	++
			A_1 2—10	1.85	33.62	5.65	4.6	6.2–6.3	неб. след.	0	0
			A_2B 10—18	1.52	28.63	5.7	4.4	6.5	0.28	0	0

Таблица 2

UM OXALIDOSUM

…тратного азота в мг на 100 г сухой почвы. Обжиг произведен 20 V. Первое взятие образцов: в лесу …трище 5 VI. Повторное взятие 1 IX

Опыт														
Вода					Лупиновая мука					$(NH_4)_2SO_4$				
pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3
6.5	—	—	след.	0	6.7	—	—	след.	0	6.6	—	—	след.	0
6.6	0	—	0	0	6.6	0	—	0	0	6 4	0	—	ничт. след.	0
6.6	0	—	0	0	6.6	0	—	0	0	6.4	0	—	»	0
—	—	—	0.32	0.32	—	—	—	0.32	0.32	—	—	—	след.	0
6.6	—	—	0	0	6.8	—	—	0	0	6.6	—	—	неб. след.	0
6.6	—	—	0	0	6.8	—	—	0	0	6.6	—	—	»	0
—	—	—	0	0	—	—	—	0	0	—	—	—	—	0
6.6	—	—	0	0	6.8	—	—	0	0	6.6	—	—	—	0
6.6	—	—	0	0	6.8	—	—	0	0	6.6	—	—	—	0
—	0	—	ничт. след.	0	—	—	—	неб. след.	0	—	—	—	неб. след.	0
—	—	—	—	—	—	0	+	»	неб. след.	—	—	—	—	—
6.6	0	—	0	0	6.6	0	—	0	0	6.6	0	—	—	0
—	0	—	7.44	7 44	—	0	—	8.49	8.49	—	0	—	ясн. след.	0
6.5	0	—	0	0	6.6	0	—	0	0	6.4	0	—	ничт. след.	0
6.5	0	—	0	0	6.6	0	—	0	0	6.4	0	—	»	0
—	++	—	15.63	15.58	—	++	—	18.36	18.31	—	++	—	17 08	17.03
6.6	0	—	0	0	6.6	0	—	ничт. след.	0	6.4	0	—	ничт. след.	0
6.6	0	—	0.88	0.60	6.7	0	—	3.47	3.19	6.6	0	—	след.	убыль

P I C E E T U M M Y R T I L

Потенциальная способность почв к нитрификации в лесу и на лесосеке до и после обжига. Количество
11 VII; на лесосеке и на кострище

Место взятия образцов, № разреза, горизонт и глубина в см				Контроль							
				Гигроскопическая влага	Влагоемкость на сухую почву	pH электр.		pH водн. выт. (колорим.)	Азот NO_3	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)
						Актуальн. кислотн.	Обменн. кислотн.				
Первое взятие образцов	2	Лес	A_0 0—10	12.49	—	5.0	—	—	след.	0	—
			A_1 10—15	4.56	82.27	—	—	6.2	0	0	—
			A_2 15—25	0.95	24.98	5.45	—	6.6	0	0	—
	33	Лесосека	A_0 0—5	12.38	370.11	5.25	—	—	след.	оч. немн.	—
			A_1 5—10	4.20	85.28	5.05	—	6.0	неб. след.	0	—
			A_2 15—20	0.65	22.19	5.45	—	6.5-6.6	0	0	—
	31	Кострище	A_0 0—5	9.94	—	6.5	—	—	след.	0	—
			A_1 5—10	5.88	—	6.1	—	—	неб. след.	0	—
			A_2 15—21	0.60	18.87	5.35	—	6.5	0	0	—
Повторное взятие образцов	62	Лес	A_0 0 - 5	8.36	—	5.1	—	—	0	0	—
			A_1 5—10	2.57	36.96	5.7	—	6.5	0	0	—
			A_2 15—20	0.90	21.90	5.6	—	6.5	0	0	—
	63	Лесосека	A_0 0 - 5	11.34	331.94	4.9	—	—	след	ничт. след.	—
			A_1 10—15	2.89	47.41	6.9	—	6.4	»	»	—
			A_2 15—25	0.56	19.05	6.2	—	6.6	0	»	—
	61	Кострище	A_0 0—2	5.60	—	7.55	—	—	0.56	ясн. след.	—
			A_1 2—10	3.19	55.97	6.85	—	6.8	1.25	ничт. след.	—
			A_2 10—20	0.83	24.39	6 35	—	6.4	ясн. след.	0	—

Таблица 3

L O S O-O X A L I D O S U M

итратного азота в мг на 100 г сухой почвы. Обжиг произведен 30 VI. Первое взятие образцов: в лесу
.2 VII. Повторное взятие 21 VIII.

Опыт														
Вода					Лупиновая мука					$(NH_4)_2SO_4$				
pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3
—	0	+++	след.	0	—	ничт. след.	+++	ясн. след.	0	—	ничт. след.	+++	неб. след.	0
6.8	0	след.	»	0	6.8	»	след.	след.	0	6.7	»	след.	ничт. след.	ничт. след.
6.6	0	0	0	0	6.8	0	неб. след.	0	0	6.5	0	+	0	0
—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.	—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.	—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.
6.7	0	след.	след.	0	6.7	0	оч. немн	след.	0	6.5	0	+	неб. след.	0
6.6	0	0	0	0	6.8	0	0	0	0	6.6	0	+	0	0
—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.	—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.	—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.
6.6	0	+	след.	0	6.7	0	+	»	»	6.5	0	++	»	»
6.6	0	0	0	0	6.8	0	ничт. след.	0	0	6.5	0	+	0	0
—	0	+++	след.	след.	—	—	—	след.	0	—	0	+++	след.	след.
6.6	0	ничт. след.	0	0	6.8	0	ничт. след.	0	0	6.5	0	+	0	0
—	0	—	0	0	—	—	—	0	0	—	—	—	0	0
—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.	—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.	—	0	+++	оч. немн.	оч. немн.
6.6	0	0	ясн. след.	0	6.8	0	0	ясн. след.	0	6.6	0	+	след.	0
6.8	0	ничт. след.	0	0	7.0	0	+	0	0	6.8	0	+	0	0
—	+++	0	19.53	19.03	—	+++	0	26.04	25.48	—	+++	0	26.62	26.06
6.8	0	след.	3.38	2.13	6.8	0	оч. немн.	4.54	3.29	6.7	0	+	1.54	0.29
6.8	0	0	след.	0	6.8	0	ничт. след.	след.	0	6.8	0	+	след.	—

P I C E E T U M

Потенциальная способность почв к нитрификации в лесу и на лесосеке до и после обжига. Коли
образцов 14 VI.

Место взятия образцов, № разреза, горизонт и глубина в см				Контроль							
				Гигроскопическая влага	Влагоемкость на сухую почву	pH электр.		pH водн. выт. (колорим.)	Азот NO_3	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)
						Актуальн. кислотн.	Обменн. кислотн.				
Первое взятие образцов	15	Лес	A_0 0—3	13.32	—	6.2	—	—	след.	ничт. след.	—
			A_1 3—10	4.98	87.91	6.05	5.2	6.6	0.59	0	—
			A_1G 17—27	1.25	31.00	6.35	5.5	6.6	—	0	—
	13	Лесосека	A_0 0—3	7.64	—	6.0	—	—	0.73	слаб. след.	—
			A_1 3—10	3.23	55.16	6.0	5.0	6.5	0.61	ничт. след.	—
			A_1G 17—26	1.21	28.93	6.25	5.3	6.6	неб. след.	след.	—
	14	Кострище	A_0 0—1	9.37	189.19	6.3	—	—	7.81	след.	—
			A_1 1—10	6.42	95.68	6.25	5.0	—	2.34	ничт. след.	—
			A_1G 17—27	1.55	35.51	6.30	5.50	6.6	оч.неб. след.	»	—
Повторное взятие образцов	115	Лес	A_0 0—2	9.27	—	6.12	5.5	—	—	—	—
			A_1 2—10	7.53	125.12	6.15	5.4	6.6	2.56	ничт. след.	—
			A_1G 17—27	2.69	42.29	6.05	5.0	6.6	0.46	0	—
	113	Лесосека	A_0 0—2	8.02	—	6.5	5.3	—	2.15	0	—
			A_1 2—10	3.48	57.92	5.75	4.9	6.4	0.44	0	—
			A_1G 17—23	1.30	21.18	6.10	5.3	6.6	—	0	—
	114	Кострище	A_0 *)	—	—	—	—	—	—	—	—
			A_1 0—10	5.91	89.75	7.55	7.0	6.8	2.42	ничт. след.	—
			A_1G 17—27	1.10	32.58	6.25	5.6	6.6	ясн. след.	0	—

*) A_0 уничтожено огнем и скотом.

Таблица 4

F O N T I N A L E

чество нитратного азота в мг на 100 г сухой почвы. Обжиг произведен 22 V. Первое взятие
Повторное 2 IX

Опыт														
Вода					Лупиновая мука					$(NH_4)_2 SO_4$				
pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3
—	ясн. след.	—	16.45	16.45	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.8	неб. след.	—	3.22	2.63	6.8	неб. след.	—	6.68	6.09	6.8	неб. след.	—	6.25	5.66
6.8	0	—	слаб. след.	слаб. след.	7.0	»	—	слаб. след.	слаб. след.	7.0	0	—	—	—
—	ничт. след.	—	17.76	17.03	—	ничт. след.	—	16.82	16.09	—	ничт. след.	—	12.21	11.48
6.6	»	—	1.74	1.13	7.0	неб. след.	—	1.62	1.01	7.0	»	—	1.21	0.60
6.7	неб. след.	—	0.24	0.24	7.1	оч. немн.	—	0.29	0.29	6.6	0	—	след.	0
—	0	—	18.67	10.86	—	0	—	67.83	60.02	—	ничт. след.	—	58 30	50.49
6.8	0	—	21.70	19.36	6.7	0	—	34.88	32.54	6.4	0	—	19.40	17.06
6.6	0	—	0.28	0.28	6.9	неб. след.	—	0.27	0.27	6.8	0	—	след.	0
—	0	+	41.12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6.7	—	—	10 42	7.86	6.8	—	—	15.63	13.07	6.6	—	—	5.20	2.64
7.0	—	—	1.20	0,74	7.1	—	—	1.30	0.84	6.9	—	—	0.74	0.28
—	неб. след.	—	41.12	38.97	—	след.	+	37.56	35.41	—	—	—	—	—
6.8	ничт. след.	—	1.51	1.07	6.8	неб. след.	—	1.74	1.30	6.7	неб. след.	—	0.86	0.42
6.8	0	—	0.24	0.24	7.0	+	—	0.41	0.41	6.8	неб. след.	—	неб. след.	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7.2	неб. след.	—	9.56	7.14	7.2	+	—	15.63	13.21	7.0	++	—	11.16	8.74
6.8	ясн. след.	—	ясн. след.	—	7.0	+	—	ясн. след.	—	7.0	след.	—	ясн. след.	0

P I N E T U M

Потенциальная способность почв к нитрификации в лесу, на лесосеке, на старом кострище 1925 г.
сухой почвы. Все

Место взятия образцов, № разреза, горизонт и глубина в см				Контроль							
				Гигроскопическая влага	Влагоемкость на сухую почву	pH электр.		pH водн. выт. (колорим.)	Азот NO_3	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)
						Актуальн. кислотн.	Обменн. кислотн.				
Взятие образцов 1 VIII	39	Лес	A_0 0—2	1.74	40.24	4.2	—	—	след.	0	++
			A_2 2—9	0.86	24.51	5.9	—	—	0	0	0
			B_1 15—25	0.86	21.85	5.5	—	—	0	0	0
	41	Лесосека	A_0 0—3	4.00	171.88	4.2	—	—	след.	0	++
			A_2 3—10	0.24	23.51	4.85	—	—	0	0	0
			B_1 15—25	1.60	27.21	—	—	—	0	0	0
	40	Кострище	A_0 0—2	2.49	66.52	6.8	—	—	0,14	0	—
			A_2 2—9	0.21	21.67	6.25	—	—	0	0	0
			B_1 15—25	1.08	22.31	—	—	—	0	0	0
	42	Сгнившая куча	A_0 0—2	2.23	75.78	4.1	—	—	неб. след.	0	+
			A_2 2—10	0.40	24.30	4.65	—	—	0	0	0
			B_1 15—25	0.99	23.92	—	—	—	0	0	0

Таблица 5

C A L L U N O S U M

на лесосеке под сгнившей кучей лесных остатков. Количество нитратного азота в мг на 100 г

бразцы взяты 1 VIII

О п ы т														
В о д а					Лупиновая мука					$(NH_4)_2SO_4$				
pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH водн. выт. (колорим.)	HNO_2 (качеств.)	NH_3 (качеств.)	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3
—	0	0	ясн. след.	0	—	0	+	ясн. след.	след.	—	0	+++	ясн. след.	след.
7.0	0	0	0	0	6.8	0	0	0	0	7.0	0	++	0	0
—	—	—	—	0	7.0	0	след.	0	0	—	—	—	0	0
—	0	след.	немн.	след.	—	0	+++	немн	след.	—	—	—	—	0
7.0	0	0	0	0	—	0	+	след.	»	6.8	0	+++	0	0
—	—	—	—	0	7.0	0	неб. след.	0	0	—	—	—	—	0
—	0	0	2.95	2.81	—	0	0	31.25	31.11	—	0	+	31.25	31.11
6.8	0	0	0.45	0.45	—	++	++	оч. немн.	оч. немн.	7.0	0	+++	0	0
—	—	—	—	—	7.0	след.	+	0	0	—	—	—	—	0
—	0	+	оч. немн.	след.	—	0	+	оч. немн.	след.	—	0	++	оч. немн.	след.
6.8–7.0	0	след.	0	0	—	0	+	0	0	7.0	0	+++	0	0
—	—	—	—	0	7.0	0	0	0	0	—	—	—	—	0

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ К НИТРИФИКАЦИИ ПОДСТИЛКИ РАЗЛИЧ

Тип леса, место взятия образцов и №№ опытов	Опыт: Состав навески для опытов: Горизонт и глубина в см	Опыт: Состав навески для опытов: Количество в г	Прибыль нитр. азота в мг на взятую навеску	То же переведенное на 100 г сухой почвы при тех же пропорциях смешения почв отдельн горизонтов
Опыт 1 Piceeto-Betuletum oxalidosum Лес 1-е взятие	A_0 0—3	10.42	след.	след.
	A_1 3—10	10.19		
	A_2B 10—18	10.18		
Опыт 2 Piceeto-Betuletum oxalidosum Лесосека 1-е взятие	A_0 0—3	20.84	0.07	0.18
	A_1 3—10	10.18		
	A_2B 10—18	10.16		
Опыт 3 Piceeto-Betuletum oxalidosum Кострище 1-е взятие	A_0 0—2	10.44	0.11	0.35
	A_1 2—10	10.18		
	A_2B 10—18	10.16		
Опыт 4 Piceetum Myrtilloso-oxalidosum Лес 1-е взятие	A_0 0—10	10.84	след.	след.
	A_1 10—15	10.26		
	A_2 15—25	10.11		
Опыт 5 Piceetum Myrtilloso-oxalidosum Лесосека 1-е взятие	A_0 0—5	11.13	оч. немного	оч. немного
	A_1 5—10	10.29		
	A_2 15—20	10.06		
Опыт 6 Piceetum fontinale Кострище 1-е взятие	A_0 0—1	10.94	8.76	21.90
	A_1 1—10	10.64		
	A_1G 17—27	10.16		
	B_1 —	10.00		
Опыт 7 Piceetum fontinale Лес Повторное взятие	A_0 0—2	10.93[2]	7.85	19.63
	A_1 2—10	10.75		
	A_1G 17—27	10.27		
	A_2 —	10.00		
Опыт 8 Piceetum fontinale Лесосека Повторное взятие	A_0 0—2	10.80	2.24	5.60
	A_1 2—10	10.35		
	A_1G 17—23	10.13		
	A_2 35—45	10.00		

[1] Совершенно очевидно, что нитрификация в этом горизонте не идет или идет настолько слабо, ная деятельность этого горизонта принята равной нулю.

[2] Количество нитратного азота в этом горизонте не определялось. На основании имеющегося сухой почвы.

Таблица 6

ЫХ ТИПОВ ЛЕСА ДО И ПОСЛЕ СМЕШЕНИЯ ЕЕ С МИНЕРАЛЬНОЙ ПОЧВОЙ

До опыта			Результаты опытов
Прибыль нитратного азота в мг на 100 г сухой почвы по отдельным горизонтам до смешения		То же при условии смешения почв отдельных горизонтов в тех же пропорциях, как в опыте	
Горизонт и глубина в см	Прибыль		
A_0 0—3	след.		Смешение не повлияло.
A_1 3—10	нет	след.	
A_2B 10—18	»		
A_0 0—3	0.3		Смешение увеличило прибыль нитратного азота на 0.03 мг на 100 г сухой почвы
A_1 3—10	нет	0.15	
A_2B 10—18	»		
A_0 0—2	»		Смешение повело к возникновению нитрификации (прибыль нитр. азота 0.35 на 100 г сухой почвы).
A_1 2—10	»	нет	
A_2B 10—18	»		
A_0 0—10	след.		Смешение не повлияло
A_1 10—15	»	след.	
A_2 15—25	нет		
A_0 0—5	оч. немного		Смешение не повлияло.
A_1 5—10	след.	оч. немного	
A_2 15—20	нет		
A_0 0—1	10.86		Смешение увеличило интенсивность нитрификации приблизительно втрое.
A_1 1—10	19.36	7.63	
A_1G 17—27	0.28		
B_1 —	не определялось[1]		
A_0 0—2	37.12		Смешение увеличило интенсивность нитрификации приблизительно в $1^1/_2$ раза.
A_1 2—10	7.86	11.43	
A_1G 17—27	0.74		
A_2 —	не определялось[1]		
A_0 0—2	38.97		Смешение уменьшило интенсивность нитрификации приблизительно в $1^1/_2$ раза.
A_1 2—10	1.07	10.08	
A_1G 17—23	0.24		
A_2 35—45	не определялось		

что существенно не может повлиять на цифры при подсчетах. Поэтому в дальнейшем нитрификацион-

сравнительного цифрового материала в дальнейшем при подсчетах оно принято равным 4 мг на 100 г

Таблица 7

ИЗМЕНЕНИЕ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ К НИТРИФИКАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ЛЕСНЫХ ПОЧВ

в зависимости от состава насаждения, а также под влиянием рубки и в результате действия огня (прибыль нитратного азота в мг на 100 г сухой почвы)

1) PICEETUM OXALIDOSUM

Первое взятие образцов					Повторное взятие образцов				
Место взятия образцов	Горизонт и глубина в см	Вода	Лупиновая мука	$(NH_4)_2SO_4$	Место взятия образцов	Горизонт и глубина в см	Вода	Лупиновая мука	$(NH_4)_2SO_4$
Лес	A_0 0—5	0	0	0	Лес	A_0 0—3	0	0	0
	A_1+A_2 5—10	0	0	0		A_1+A_2 3—10	0	0	0
	A_2 10—20	0	0	0		A_2 10—20	0	0	0
Лесосека	A_0 —	—	—	—	Лесосека	A_0 0—3	след.	ничт. след.	ясн. след.
	A_1+A_2 2—10	0	0	0		A_1+A_2 3—10	0	0	0
	A_2 10—20	0	0	0		A_2 10—20	0	0	0
Кострище	A_0 0—2	0.50	0.72	0.51	Кострище	A_0 0—2	35.02	58.18	57.96
	A_1+A_2 2—10	0	0	0		A_1+A_2 2—10	0	0	0
	A_2 10—20	0	0	0		A_2 10—20	0	ничт. след.	0

2) PICEETO-BETULETUM OXALIDOSUM

Место взятия образцов	Горизонт и глубина в см	Вода	Лупиновая мука	$(NH_4)_2SO_4$	Место взятия образцов	Горизонт и глубина в см	Вода	Лупиновая мука	$(NH_4)_2SO_4$
Лес	A_0 0—3	0	0	0	Лес	A_0 0—3	0	0	0
	A_1 3—10	0	0	0		A_1 3—10	—	0	—
	A_2B 10—18	0	0	0		A_2B 10—18	0	0	0
Лесосека	A_0 0—3	0.32	0.32	0	Лесосека	A_0 0—3	7.44	8.40	0
	A_1 3—10	0	0	0		A_1 3—10	0	0	0
	A_2B 10—18	0	0	0		A_2B 10—18	0	0	0
Кострище	A_0 0—2	0	0	0	Кострище	A_0 0—2	15.58	18.31	17.03
	A_1 2—10	0	0	0		A_1 2—10	0	0	0
	A_2B 10—18	0	0	0		A_2B 10—18	0.60	3.19	убыль

3) PICEETUM MYRTILLOSO-OXALIDOSUM

Первое взятие образцов					Повторное взятие образцов				
Место взятия образцов	Горизонт и глубина в см	Вода	Лупиновая мука	$(NH_4)_2SO_4$	Место взятия образцов	Горизонт и глубина в см	Вода	Лупиновая мука	$(NH_4)_2SO_4$
Лес	A_0 0—10	0	0	0	Лес	A_0 0—5	след.	след.	след.
	A_1 10—15	0	0	0		A_1 5—10	0	0	0
	A_2 15—25	0	0	0		A_2 15—20	0	0	0
Лесосека	A_0 0—5	оч. немн.	оч немн.	оч. немн.	Лесосека	A_0 0—5	оч. немн.	оч. немн.	оч. немн.
	A_1 5—10	0	0	0		A_1 10—15	0	0	0
	A_2 15–20	0	0	0		A_2 15—25	0	0	0
Кострище	A_0 0—5	оч. немн.	оч немн.	оч. немн.	Кострище	A_0 0—2	19.03	25.48	26.06
	A_1 5—10	0	оч. немн.	оч. немн.		A_1 2—10	2.13	3.29	0.29
	A_2 15—21	0	0	0		A_2 10—20	след.	0	0

4) PICEETUM FONTINALE

Лес	A_0 0—3	16.45	—	—	Лес	A_0 0—2	41.12*)	—	—
	A_1 3—10	2.63	6.09	5.65		A_1 3—10	7.86	13.07	2.64
	A_1G 17—27	слаб. след.	слаб. след.	0		A_1G 17—27	0.74	0.84	0.28
Лесосека	A_0 0—3	17.03	16.09	11.48	Лесосека	A_0 0—2	38.97	35.41	—
	A_1 3—10	1.13	1.01	0.60		A_1 2—10	1.07	1.30	0.42
	A_1G 17—26	0.24	0.29	0		A_1G 17—23	0.24	0.41	неб. след.
Кострище	A_0 0—1	10.86	60.02	50.49	Кострище	A_0 **)	—	—	—
	A_1 1—10	19.36	32.54	17.06		A_1 0—10	7.14	13.21	8.74
	A_1G 17—27	0.28	0.27	0		A_1G 17—27	0	0	0

*) Эта цифра означает количество азота без вычета его первоначального содержания в почве до опыта. Последнее не могло быть определено за недостатком материала.

**) A_0 уничтожено огнем и скотом.

5) PINETUM CALLUNOSUM

Место взятия образцов	Горизонт и глубина в см	Вода	Лупиновая мука	$(NH_4)_2SO_4$
Лес	A_0 0—2	ясн. след.	ясн. след.	ясн. след.
	A_2 2—9	0	0	0
	B_1 15—25	—	0	—
Лесосека	A_0 0—3	немного	немного	—
	A_2 3—10	0	след.	0
	B_1 15—25	—	0	—
Кострище	A_0 0—2	2.81	31.11	31.11
	A_2 2—9	0.45	оч. немного	0
	B_1 15—25	—	0	—
Сгнившая куча	A_0 0—2	оч. немного	оч. немного	оч. немного
	A_2 2—10	0	0	0
	B_1 15—25	—	0	—

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ДЕЙСТВИИ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ НА ПРОЗРАЧНЫЕ СРЕДЫ ГЛАЗА

А. П. ДЕВИРЦА и С. М. ХАЮТИНА

(*Представлено академиком* **П. П. Лазаревым**)

Изучение действия рентгеновских лучей на прозрачные среды глаза представляет собой интерес с точки зрения общей биологической теории действия рентгеновских лучей. В то же время этот вопрос представляет собой огромное практическое значение, так как рентгеновские лучи, действуя во время сеансов диагностики и терапии на глаз, могут вызывать такие в нем изменения, которые являются гибельными для зрения. На это обстоятельство обращалось сравнительно небольшое внимание до последнего времени, и нам представлялось интересным выяснить этот вопрос опытами на животных.

Для этих опытов были взяты 18 кроликов, которые и были подвергнуты действию рентгеновских лучей. При опытах применялись следующие условия: было дано так называемое трехпольное освещение (одно — лобное и два — височных) при расстоянии от антикатода в 24 см, при фильтре в 1 мм алюминия при напряжении в 120 киловольт и при токе 2.5 миллиампер. Применялась трубка Кулиджа, причем первой группе животных была дана доза на каждое поле 2Н, второй — 3Н, третьей — 4Н, четвертой — 5Н. Заметное прогрессирующее изменение наступило при дозе в 4Н на каждое поле. Через 2—3 месяца на задней капсуле хрусталика появились тонкие помутнения, принимающие форму решетки или сети. Эти образования, постепенно увеличиваясь и сгущаясь в аксиальной части, переходили в лентовидные образования (главным образом в области заднего горизонтального шва). Иногда они образовывали звездообразные помутнения, направляющиеся вперед к центральной части хрусталика. Это наблюдалось в конце 5—6 месяца. В задней коре и в ядре хрусталика появились легкие помутнения с нерезкими краями, которые переливались цветами радуги.

Нередко появлялись отдельные мелкие вакуоли, преимущественно в области переднего вертикального шва. В трех случаях осмотр хрусталика энуклеированных кроличьих глаз 3—4 группы показал на заметное невооруженным глазом поверхностное помутнение в области задней капсули. Опыты, проделанные с освещением свеже энуклеированных хрусталиков глаза кролика и крупного рогатого скота, помещенных в жидкий парафин, не дали положительных результатов. К этому нужно прибавить, что наблюдения, сделанные нами с людьми, подвергшимися также освещению для целей терапии рентгеновскими лучами, дали в целом ряде случаев положительные результаты, причем помутнения наблюдались не только в хрусталике, но и в стекловидном теле, а также в роговой оболочке, где эти изменения были сравнительно скоро преходящими. Мы можем таким образом придти к заключению, во-первых, что хрусталик является весьма чувствительной тканью по отношению к рентгеновским лучам. Наблюдения над людьми показали, что в хрусталике в молодом возрасте изменения наступают скорее и легче, чем в зрелом возрасте. Повидимому, не у всех животных и людей изменения получаются одинаково легко. Здесь возможно некоторое предрасположение организма. Из сказанного понятно, что необходимо соблюдать известную осторожность при освещении рентгеновскими лучами головы, в особенности глаза. Желательно при лечении опухоли в области головы предупреждать больных о возможных последствиях со стороны органов зрения. Клиническая сторона нашей работы будет подробнее изложена в специальном медицинском журнале.

В заключение считаем долгом выразить глубокую благодарность академику П. П. Лазареву за интерес, проявленный им к нашей работе.

Свердловск.
Институт профзаболеваний
и Рентгеновский институт.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ПРИЖИЗНЕННОЕ ПРОМЫВАНИЕ ОРГАНИЗМА ТЕПЛОКРОВНОГО ЖИВОТНОГО

П. М. ЧЕПОВА

(*Представлено* Комитетом по подготовке кадров)

1-е сообщение

Настоящее сообщение является продолжением ряда работ, произведенных при моем участии в 1-м Средне-Азиатском Гос. университете при кафедре физиологии в г. Ташкенте.

Проф. И. П. Михайловский впервые в 1914 г. (1) выдвинул проблему прижизненного промывания крови. Опытами над собаками в 1924—1925 гг. эта проблема была проработана применительно к отравлению супралетальными дозами морфия, вводимыми непосредственно в кровь. Было установлено, что прижизненное промывание крови у таких отравленных животных делает возможным сохранение их жизни, в то время как контрольные животные, т. е. предоставленные после отравления морфием самим себе, поголовно погибали с явлениями острого морфийного отравления.

Методика указанных экспериментов И. П. Михайловского в кратких чертах сводилась к следующему.

Отравленное животное остро обескровливалось,[1] выпущенная кровь дефибринировалась, причем одна четвертая или одна пятая часть ее вводилась животному обратно немедленно, а остальная кровь разбавлялась десятикратным количеством Рингер-Локковской жидкости и оставлялась для осаждения эритроцитов на льду до следующего дня. В виду того, что осаждение не успевало завершиться полностью в течение суток, поэтому и введение эритроцитов в организм животного вместе с Рингер-Локковской жидкостью, взятой по объемному расчету на эритроциты, растягивалось до

[1] Обескровливание продолжалось до истечения крови из arteriae carotis по каплям и до прекращения вместе с этим автономного дыхания животного.

2-х суток. Кровяная сыворотка, как содержащая значительную часть морфия, удалялась и в организм не вводилась (2).[1]

В связи с этим выдвинулся ряд вопросов, требовавших экспериментального разрешения, а именно:

1) необходимо было установить, все ли животные, подобно собакам, толерантны к максимальному острому обескровливанию их организма, или же у других животных (напр., всеядных, к числу которых, как известно, принадлежит и человек) острая анемия может повлечь за собой острый непоправимый паралич дыхательного центра, а вслед за этим и сердца;

2) можно ли без вреда для жизни животного производить максимальное обескровливание его организма при предварительном полном же его наркозе.

Оба эти вопроса были разрешены положительно в поставленных автором экспериментах вначале на кроликах, а затем на обезьяне из породы Macacus rhesus из Индии — «Яше» (3).

В процессе разрешения только что указанных вопросов, в одной из серий таких опытов нами было отмечено одно существенное явление следующего характера.

Был поставлен опыт на кролике. Через ввязанную канюлю в брюшную аорту (aorta abdominalis) кролика, находившегося под смешанным хлороформно-эфирным наркозом, — кролик был остро, в течение полминуты обескровлен. Одновременно с этим прекратилось автономное дыхание, замененное немедленно искусственным, производившимся путем сжатия грудной клетки пальцами обеих рук.

Когда взятая кровь была дефибринирована, последняя с добавлением Рингер-Локковской жидкости и желатины, взятой в количестве 0.4%, взамен удаленного из крови фибрина, будучи подогрета до температуры 39° Ц. — была вновь введена кролику через vena jugularis externa. Спустя 2—3 минуты после начала введения крови у животного, несмотря на полный наркоз, автономное дыхание восстановилось, при одновременно продолжавшейся прекрасной работе сердца.

Данный опыт был вновь повторен в том же виде, дав такой же благоприятный результат.

Сделанное нами наблюдение «restitutio ad integrum», помимо того, что явилось доказательством переживаемости сердца кролика в отношении

[1] Промывание касалось лишь части всей крови, т. е. крови, находившейся, главным образом, в сердце и в больших сосудах.

полного восстановления нормальной деятельности его в организме при остром обескровливании, навело также и на мысль о возможности постановки для экспериментального разрешения проблемы прижизненного промывания и всего организма.

В направлении разрешения вновь поставленной проблемы мною и были начаты в 1928 г. работы совместно с проф. Михайловским в том же Средне-Азиатском Гос. университете. Однако, к сожалению, опыты эти не привели нас тогда к положительным результатам. Опытные животные либо погибали на операционном столе, либо спустя 2—6 часов после операции, и нужно отметить, что причины их смерти носили в большом числе случаев технический или случайный характер — тромбирование кровеносных сосудов с последующей эмболией, отек легких и др.

В 1930 г., после смерти проф. И. П. Михайловского, разработка указанной проблемы в отношении ее экспериментального разрешения была мною перенесена в Ленинградский Институт экспериментальной медицины, в лабораторию проф. Е. С. Лондона. В сентябре месяце 1930 г. были поставлены эксперименты, давшие уже положительный результат в отношении принципиального разрешения проблемы прижизненного промывания организма, но в виду того, что для обескровливания были взяты arteriae femorales — и в том и в другом эксперименте животные[1], одно через 5 и другое через 7 суток, погибли при диагнозе гангрены задней конечности.

Нам известно, что перевязка arteriae femoralis влечет за собою в известном проценте[2] случаев указанное осложнение, поэтому для избежания последнего в дальнейших экспериментах обескровливание всегда производилось через arteria carotis externa. Перевязка одной art. carotis не вызывает каких-либо видимых последствий в дальнейшей жизни животного. Снабжение мозга происходит через arteriae vertebrales и оставшуюся другую art. carotis.

Перехожу теперь к описанию опытов, приведших к положительному экспериментальному разрешению проблемы прижизненного промывания организма теплокровного животного.[3]

Необходимо отметить, что операция эта требует высокой степени стерильности при всех манипуляциях и в особенности стерильности как промывной питательной жидкости, так и крови.

1 Экспериментальными животными служили собаки.

2 От 13 до 27 % (у человека).

3 Опыты были проведены на собаках и кроликах.

Физиологический раствор хотя и употреблялся нами (в отношении глюкозы) несколько различного состава в тот или другой период промывания, но это вряд ли имеет какое-либо существенное значение. Можно употреблять физиологические растворы, напр., как Ringer-Locke, так и Tyrode.

Мы, пользуясь и тем и другим, не видели каких-либо бросающихся в глаза преимуществ, остановясь, таким образом, на Ringer-Locke'овском растворе следующего состава: 1) NaCl 0.95, 2) KCl 0.02, 3) $NaHCO_3$ 0.03, 4) Glucosa от 0.1 до 0.4, 5) Gelatina 0.4, 6) $CaCl_2$ 0.02, 7) Aq. dest. 100.0. Желатина добавлялась нами взамен удаляемого при дефибринировании крови фибриногена. Расвор стерилизуется.

Наркоз применялся обычный морфийный, при подкожном введении.

Аппаратура состоит из двух градуированных цилиндров, установленных на специальной стойке, соединенных при помощи стеклянного треугольника резиновыми трубками одинакового диаметра со стеклянным змеевиком, находящимся в стакане с водой, в котором помещается электрический нагреватель и термометр. От змеевика идет резиновая трубка, имеющая на своем пути вставленную стеклянную трубку с овальным расширением, соединенным резиновой трубкой со стеклянной сосудистой канюлей на конце. Вся эта аппаратура также стерилизуется.

Через Ringer-Locke'овскую жидкость пропускается для насыщения последней, а также и через кровь, кислород из бомбы через вставленные в цилиндры стеклянные трубки с оттянутыми капиллярами на концах. Ringer-Locke или кровь, проходя через змеевик, нагревается до температуры тела (39° Ц.) и, таким образом, в организм вводится соответственно подогретой.

Первый опыт, после которого оперированное животное осталось жить (опыт произведен на собаке), относится к 19 Апреля 1931 г., после того как группа помощников, помогавших мне при проведении опытов, приобрела надлежащую тренировку.

В виду сложности наших опытов и спешности проведения всех мер, требуется по меньшей мере три помощника. Этим, отчасти, объясняется почему описываемые нами опыты затянулись сверх теоретического ожидания.

Я ограничусь изложением процесса прижизненного промывания организма теплокровного животного в двух опытах.

Опыт, произведенный 26 июля 1931 г.

Собака «Джон», весом 25 кг, температура in rectum 38,5 Ц., пульс 95 в минуту, дыхание 22 в минуту.

Общее количество крови в организме, исходя из $^1/_{15}$ веса тела, равно 1660 см.³ Морфийный наркоз под кожу.[1]

Канюли вводятся в два кровеносных сосуда: 1) arteria carotis externa sinistra и 2) vena jugularis externa dextra с таким расчетом, чтобы через артериальную канюлю животное могло быть обескровлено, а через венозную — можно было бы ему вводить попеременно Ringer-Locke и, наконец, его же собственную дефибринированную кровь.

В местах введения канюль периферические[2] концы обоих кровеносных сосудов перевязывались шелковыми нитями наглухо.

Увязанный в станок, через отпрепарованную arteria carotis externa sinistra и ввязанную в последнюю стеклянную канюлю с надетой на нее резиновой трубкой длиной в 10 см., «Джон» был в 3 ч. 05 мин. 20 сек. остро обескровлен.

Обескровливание длилось 4 мин. 40 сек.[3] Взято крови 1150 см.³ или 69% общего количества последней в организме.

Кровь в течение еще 2—3 минут после окончания обескровливания продолжали дефибринировать пучком стеклянных палочек с резиновыми трубками на концах в широком измерительном цилиндре.

После дефибринизации и проведения через сложенный в 4 слоя стерильный марлевый фильтр, для освобождения крови от кусочков фибрина, цилиндр с кровью был покрыт комком стерильной ваты, обвернутым марлей, и кровь сохранялась при температуре операционной комнаты.

В момент закрытия артериальной канюли была открыта венозная, через которую был введен окислороженный и подогретый до температуры 39° Ц. Ringer-Locke'овский раствор, причем глюкоза была взята в размере 0.2%.

Введение Ringer-Locke'овского раствора продолжалось так же, как и обескровливание, 4 мин. 40 сек.[4] Введено Ringer-Locke'овского раствора 900 куб. см.[5]

[1] 13 см³ двухпроцентного раствора Morphii muriatici.

[2] Считая от сердца.

[3] Обескровливание начато в 3 ч. 05 мин. 20 сек. и закончено в 3 ч. 10 минут.

[4] Введение начато в 3 ч. 10 мин., закончено в 3 ч. 14 мин. 40 сек.

[5] Т. е. на 250 см менее, чем было взято крови во избежание сильного переполнения сосудистой системы в дальнейшем.

Полученное разведение оставшейся в организме крови выразилось в 1.76 раза. С таким разбавленным составом крови «Джон» был оставлен в течение 10 мин. 20 сек.[1]

В 3 ч. 25 мин. было произведено второе обескровливание «Джона». Взято 650 см³ и, при продолжавшемся обескровливании, в 3 ч. 28 мин. 20 сек. было начато одновременно и введение свежего Ringer-Locke'овского раствора, законченное в 3 ч. 33 мин. 20 сек.

Взято было при продолжении обескровливания до 3 ч. 33 мин. 50 сек. еще 500 см.³,[2] а введено Ringer-Locke'а 900 см³.

Таким образом, при вторичном обескровливании было взято смеси 650 + 500 см.³ = 1150 см³, а дано организму Ringer-Locke'а 900 см³.[3]

В 3 ч. 35 мин. было начато введение в организм «Джона» его же собственной дефибринированной крови в количестве 1100 см³.[4]

В 3 ч. 41 мин. введение крови было закончено, и в 3 ч. 41 мин. 40 сек. был введен 1 см.³ sol adrenalini ex 1.0—1000.0 для поддержания тонуса сосудистой системы и улучшения коронарного снабжения сердечной мышцы.

Введение адреналина в указанном количестве и разведении резко повышает кровяное артериальное давление только в первый момент, затем через некоторое время (через 2—3 мин.) давление вновь падает, оставаясь, однако, несколько выше, чем было до его введения, и несколько ниже бывшего до начала опыта.

Кровь, полученная при втором обескровливании, в организм, введена не была, чем, безусловно, организм был ослаблен как в количественном, так и в качественном отношениях.

Правильно, конечно, вводить и эту кровь, правда, лучше одни форменные элементы с удалением жидкой части, заменив последнюю свежим Ringer-Locke'овским раствором.

На этом операция была закончена. Art. carotis et vena jugul. externa были перевязаны, на кожную рану наложены швы.

В организм животного было введено на 36% больше жидкостей, чем у него было ранее.

[1] Конец введения Ringer-Locke'а после первого обескровливания отмечен в 3 ч. 14 мин. 40 сек. Начало же вторичного обескровливания в 3 ч. 25 мин.

[2] Обескровливание при одновременном введении Ringer-Locke'а резко усилилось.

[3] Во введенном растворе Ringer-Locke'а было 0.4% глюкозы.

[4] Взятой в период первого обескровливания в 3 ч. 05 мин. 20 сек., т. е. после 29 мин. 40-сек. хранения последней при комнатной температуре.

Такое увеличение, и даже гораздо большее, животные переносят легко, освобождаясь от этого избытка усиленной саливацией, мочеиспусканием, учащенным дыханием, жидкими дефекациями и т. д.

Опыт, произведенный 1 Августа 1931 г.

Собака «Джэк», весом 20.2 кг, температура 38.5 Ц. in rectum. Общее количество крови в организме, исходя из $^1/_{15}$ веса тела, равно 1346 см³. Пульс 92 удара в минуту, дыхание 24 в минуту. Морфийный наркоз под кожу.[1]

Операционная подготовка та же, что и в описанном опыте 26 VII 1931 г.

После отпрепарования arteriae carotis externa sinistra et vena jugularis ext. dextra и введения в них канюль, «Джэк» в 2 ч. 05 мин. 45 сек. был остро обескровлен.

Обескровливание длилось в течение 9 мин. 30 сек.[2] Взято крови 1100 см³ или 81.7% общего количества последней в организме. Условия обращения с дефибринированной кровью и ее хранения были такие же, как и в опыте 26 VII 1931 г.

Спустя 35 сек. после произведенного обескровления «Джэк» прекратил дыхание, которое было заменено искусственным.[3]

Одновременно с закрытием артериальной канюли и прекращением обескровливания было начато введение через v. jugularis ext. dextra окислороженного и подогретого до температуры 39.5 Ц. Ringer-Locke'овского раствора. Введено 1130 см³ в продолжение 4 мин. 15 сек. Начало введения отмечено в 2 ч. 15 мин. 15 сек., конец в 2 ч. 19 мин. 30 сек.

Во время введения Ringer-Locke'а в 2 ч. 16 мин. 30 сек. наступило вновь eupnöe, и прекращено вместе с этим искусственное дыхание.

После взятия из организма «Джэка» 1100 см³ у него осталось крови 246 см³, после же введения ему 1130 см³ Ringer-Locke'а кровь была разбавлена в 4.59 раза.

С этим составом «Джэк» оставлен был в течение 14 минут 15 сек.[4]

[1] Введено 10 см³ 2% водного раствора Morphii muriatici.

[2] Обескровливание закончено в 2 ч. 15 мин. 15 сек.

[3] Дыхательные движения производились ритмическим сжатием грудной клетки ладонями обеих рук оператора.

[4] Введение Ringer-Locke'а было начато в 2 ч. 15 мин. 15 сек., второе обескровливание начато в 2 ч. 29 мин. 30 сек.

В 2 ч. 29 мин. 30 сек. было начато вторичное обескровливание «Джэка». К 2 часам 32 мин. 30 сек. было взято 650 см³ крови, с какового момента была открыта канюля в vena jugul. externa dextra, и начато, с одновременно продолжающимся обескровливанием, введение в организм Ringer-Locke'овского раствора,[1] продолжавшееся до 2 ч. 35 мин. 05 сек.

За время с 2 ч. 32 мин. 30 сек. до 2 ч. 35 мин. 05 сек. было введено Ringer-Locke'а 770 см³, а взято из организма еще 500 см³. Таким образом, организм «Джэка», получив 770 см³ Ringer-Locke'а, потерял 1150 см³ смеси крови и физиологического раствора.

Взятая кровь при вторичном обескровливании была также дефибринирована и проведена через марлевый фильтр.

Полученное при этом количество фибрина указывало на значительное еще содержание в этой смеси крови.

Организм «Джэка» в течение 6 минут 25 сек.[2] находился под воздействием процесса промывания точно так же, как и при введении Ringer-Locke'а после первого обескровливания.

В 2 ч. 35 мин. 55 сек. было начато введение дефибринированной крови «Джэка», взятой при первом обескровливании, и в течение 2 мин. 35 сек. введено 1000 см³.[3]

Через 2 мин. 55 сек. после окончания введения 1000 см³ крови[4] была введена и вторая часть кровяной смеси, полученной во время вторичного обескровливания[5] в количестве 450 см³, введение закончено в течение 2 минут 35 сек.[6]

На этом операция была закончена. Произведена перевязка обоих сосудов и обычный туалет кожной раны.

«Джэк» получил жидкости в организм на 81.7% больше, чем находилось у него, исходя из $^1/_{15}$ веса тела.

В процессе обескровливания животного и в первом и во втором опытах мы наблюдаем, что по мере обескровливания дыхание и сердцебиение заметно учащаются, затем дыхание становится более поверхностным. В даль-

[1] Состав этого раствора был следующий: 1) NaCl 0.95, 2) KCl 0.02, 3) $CaCl_2$ 0.02, 4) $NaHCO_3$ 0.03, 5) Glucosa 0.4, 6) Gelatina 0.8, 7) Aq. dest. 100.0.

[2] Т. е. с 2 ч. 29 мин. 30 сек. до 2 ч. 35 мин. 55 сек.

[3] Введение крови начато в 2 ч. 35 мин. 55 сек., закончено в 2 ч. 38 мин. 30 сек.

[4] Начато введение в 2 ч. 41 мин. 25 сек.

[5] Вторичное обескровливание было начато в 2 ч. 29 мин. 30 сек., закончено в 2 час. 32 мин. 30 сек. Вторая часть крови относится крови, полученной за этот промежуток времени.

[6] Введение закончено в 2 ч. 44 мин.

нейшем оно делается более редким и глубоким, останавливаясь, наконец, совершенно. Сердце продолжает свою работу, но реже и напряженнее. Пульс в art. femoralis к концу первого обескровливания в опыте 1 августа 1931 г. не прощупывался.

При вторичном обескровливании автоматия дыхательного центра прекращается гораздо ранее (в 2—3 раза), не говоря уже о третьем обескровливании.[1] Это вполне понятно, если принять во внимание качественный и количественный состав оставшейся в организме крови и связанные с этим изменения в жизнедеятельности организма. Кровяное внутрисосудистое давление по мере удаления крови падает, но после введения Ringer-Locke'а повышается вновь, хотя все же не достигает первоначальной высоты.

Деятельность дыхательного центра, по мнению Гизеля, Винтерштейна и др., регулируется состоянием pH его клеток, т. е. концентрацией водородных ионов молочной и угольной кислот, образующихся в результате обмена веществ этих клеток, выводимых в окружающие жидкости.

В результате недостатка в кислороде и увеличенного содержания углекислоты получается увеличенное pH в дыхательном центре, и поэтому происходит стимулирование дыхательного процесса. При недостатке кислорода мы имеем быстрое образование угольной кислоты в клетках дыхательного центра, что влечет за собой возбуждение последнего — усиление дыхания, увеличенное поглощение кислорода, а все это, в свою очередь, ведет к усиленной отдаче углекислоты и к усилению окислительных процессов в клетках дыхательного центра. Увеличенное же содержание углекислоты препятствует диффузии последней из клеток дыхательного центра.

Учащение дыхания при обескровливании является результатом обеднения крови кислородом вследствие понижения общего количества оксигемоглобина. До обескровливания в артериальной крови было определено в опыте 26 VII 31 г. содержание кислорода в 20.4%, а в конце первого обескровливания в 17.6%. В опыте 1 VIII 31 г., при вторичном обескровливании и промывании организма, кислород был определен в 6.7%, в то время как до опыта — определен в 15.3% (Д-р А. М. Дубинский).

Колебание гемоглобина крови в опыте 1 VIII 31 г. выразилось в следующем:

До опыта гемоглобин был определен в 65% (по Sahli);[2] в конце вторичного обескровливания, после введения Ringer-Locke'а, в 20% и после введения дефибринированной крови в 50%.

[1] Эти данные получены в других, не описываемых мною здесь опытах

[2] Собака была несколько анемична.

Количество эритроцитов с 3 100 000 в 1 мм^3 упало к концу вторичного обескровливания после введения Ringer-Locke'a до 800 000 в 1 мм^3.

В результате учащенного дыхания легкими выделяется больше 1/5 части угольной кислоты (по сравнению с нормой), вследствие чего изменяется pH крови, которое, в свою очередь, очевидно, влияет на дыхательный центр.

Как результат этого влияния мы и имеем ослабление дыхательных движений, приводящее, наконец, к их остановке вследствие паралича дыхательного центра.

Искусственное дыхание, производящееся вслед за прекращением eupnöe, поддерживает выделение CO_2 легкими и таким образом предупреждает более или менее значительное накопление последней в организме, а с ней и углубление ацидоза, могущего привести организм к стойкому, непоправимому параличу дыхательного центра, а затем и остановке сердца.

При введении в организм Ringer-Locke'a, хотя и являющегося по своему составу неполноценным по сравнению с кровью, но содержащего, с одной стороны, в физическом насыщении кислород, а, с другой—$NaHCO_3$, мы наблюдаем возобновление автономного дыхания при введении в организм через vena jugularis externa уже около 400—600 см^3 Ringer-Locke'a.

Таким образом, повидимому, в организме вновь происходит быстрое восстановление отношения концентрации угольной кислоты (H_2CO_3) к бикарбонату Na ($NaHCO_3$) и установление вновь соответствующего pH до пределов некоторой относительной, для данного состояния организма, нормы.

Детальное изучение этих процессов газового состояния и обмена представляет содержание ближайших дальнейших работ.

В первый период после операции представляет опасность возможное кровотечение, хотя бы из кожных швов, так как свертываемость крови бывает понижена. Это кровотечение, которое в обычных условиях не имеет никакого значения, здесь может повести к значительной потере крови. В опыте с «Джоном» 26 VII 31 г. такое подкожное кровотечение было остановлено только к 11 часам ночи наложением сильно давящей повязки на шов.

Что касается послеоперационного ухода, то каких-либо особых мер к оперированным таким образом животным, по сравнению с другими оперированными, напр., ангиостомированными, мы сознательно не предпринимали, хотя нужно оговориться, что в целях оказания активной помощи прижизненно промытому организму следует предпринимать ряд, мер, как то: согревание тела (помещение животных в теплые комнаты), введение под

кожу молочной сыворотки для лучшего сохранения своего органного белка и др.

Аппетит у таких животных резко повышается.

В июне 1932 г. «Джону» была произведена ангиостомическая операция с наложением канюли (без предварительной подготовительной операции) на v. lumbalis, которую он перенес хорошо.

Наложение канюли на v. lumbalis, и тем более в первую же операцию, животные вообще переносят крайне плохо, и здесь мы имеем весьма значительный % смертности. Этот же случай говорит нам за то, что сосудистая система у таких прижизненно промытых животных, повидимому, укрепляется и, как видно, одна эта операция является сама по себе подготовительной к наложению канюли.

Остается, однако, выяснить, в какой промежуток времени после операции происходит такое укрепление сосудистых стенок животного.

В этом сообщении я не даю каких-либо более детальных данных по вопросу обмена веществ в прижизненно промываемом и промытом организме — это является работой ближайшего будущего.

Я не указываю также и на возможное применение этой методики в целях практики — полученные нами данные в этом направлении еще несколько не ясны.

Выводы

Целью настоящей работы было установить экспериментально, на основе полученных ранее данных, возможность такого прижизненного промывания организма. Это на здоровых животных достигнуто.

В методике прижизненного промывания организма мы имеем возможность получения из организма такого количества крови, без которого он, при других обстоятельствах, жить не в состоянии.

В первое обескровливание мы можем безбоязненно получить до 75% общего количества крови в организме, в то время как быстрая, подобно нашим опытам, потеря половины всей крови, напр. у взрослого организма, является уже опасной для жизни.

При вторичном обескровливании наличие значительного количества фибрина указывает на дальнейшую потерю организмом крови, и если грубо взять количество выпущенной при этом крови за 15—20%, то обескровливание организма достигает, повидимому, 85—90% общего ее количества.

Взятая кровь при первом обескровливании находилась вне организма в опыте 26 VII 31 г. в течение 30 мин. 20 сек. и 1 VIII 31 г.—в течение 30 мин. 10 сек. и могла быть подвергнута за этот срок тому или другому воздействию со стороны различных реагентов — биологических, химических, физических и др.

Проф. И. П. Михайловский, напр., в своей работе указывает, что взятую из организма кровь можно подвергнуть биологической очистке, воздействуя на нее лучистой электрической энергией, напр., ультрафиолетовыми лучами или просто светом, изменить ее газовый состав в ту или другую сторону и т. д.

Для определения степени воздействия на кровь вне организма, без нарушения ее физиологических свойств и структуры, необходимы, очевидно, дальнейшие соответствующие исследования.

Полученная кровь при вторичном обескровливании, с одной стороны, может совсем не вводиться в организм, как это было сделано в опыте с «Джоном», или же, если первое обескровливание было резкое, как в опыте с «Джэком», кровь может быть введенной без вреда для животного через некоторый, гораздо более длительный промежуток времени после возвращения организму крови первого обескровливания.

С осуществлением методики прижизненного промывания организма и крови встает для разработки целый ряд вопросов как теоретического, так и практического характера из области физиологии крови, фармакологии и терапии, напр., таких заболеваний, основанием которых является нарушенное состояние самой крови больного организма.

Одновременно с этим ставится для исследования ряд важных вопросов:

1) как совершаются функции отдельных органов во время и после прижизненного промывания организма;

2) как быстро, в какой степени и в какой последовательности происходит процесс регенерации форменных элементов крови;

3) как меняется обмен веществ в целом и газовый обмен в частности, а также и внутренняя секреция отдельных органов во время прижизненного промывания, и какое участие принимают отдельные органы в процессе восстановления нормальных отношений в организме после промывания его;

4) какое влияние и в какой мере оказывает на кровь, находящуюся вне организма, воздействие различными биологическими, химическими и физическими реагентами, имея в виду обратное ее введение в организм животного;

5) проследить влияние на кровь как в смысле освобождения последней от патогномоничных микроорганизмов, так и в целях лечебных, воздействуя различными антисыворотками, применением адсорбирующих веществ без нарушения, однако, ее основных физиологических свойств и морфологии;

6) изучение возможностей применения прижизненного промывания организма и крови в отношении терапии различных заболеваний и в первую очередь общих заболеваний крови, а также различных случайных отравлений организма,

Заканчивая на этом первое сообщение, выражаю мою глубокую признательность и благодарность проф. Е. С. Лондону как за предоставление возможности проведения экспериментальных работ в его лаборатории, так и за те советы, которые я получал от него в процессе выполнения поставленной задачи.

Бригаде студентов-практикантов Ленинградского Гос. университета товарищам: С. Миропольскому, Г. Н. Покровской, З. Н. Казимировой и Н. А. Свешниковой, принимавшим участие в операциях, — мое товарищеское спасибо.

Институт экспериментальной медицины,
Отдел общей патологии.
Ленинград.

ЛИТЕРАТУРА

1) Русский врач, 1914, № 25.

2) И. П. Михайловский. Прижизненное промывание крови, его методика, проблемы и значение в интоксикации организма. Врачебное обозрение, 1925, V, № 5.

3) П. М. Чепов. Новые данные по вопросу о прижизненном промывании крови. Казанский медиц. журнал, 1928, № 11.

4) Е. С. Лондон. Обмен веществ в животном организме, 1932.

5) Ч. Ловатт Эванс. Современные успехи физиологии, 1931.

P. ČEPOV. LE LAVAGE DE L'ORGANISME RÉALISÉ SUR UN ANIMAL À SANG CHAUD VIVANT

RÉSUMÉ

Le travail actuel a pour but d'établir par expérience, sur des données antérieures, la possibilité du lavage du sang, accompli sur un organisme vivant, ce qui a été réalisé sur des animaux bien portants (chiens, chats, lapins).

Nous obtenons dans la methode du lavage du sang d'un organisme vivant la possibilité d'une soustraction d'une quantité considérable de sang, en conservant en même temps la vie de l'animal.

Nous pouvons obtenir par la première saignée jusqu'à 75 $^0/_0$ de la quantité totale du sang de l'organisme, en remplaçant le sang soustrait par la même quantité du liquide de Ringer-Locke. Le liquide injecté est préalablement chauffé à la température du corps. La seconde saignée se fait dans un délai de 10 à 15 minutes. Le sang obtenu par la seconde saignée est un mélange de sang et du liquide injecté de Ringer-Locke. La quantité totale de ce mélange est à peu près égale à la quantité du sang, reçu à la première saignée. Nous obtenons ainsi une perte sanguine de l'organisme vivant égale à 85—90 $^0/_0$ de la totalité du sang. Le sang extrait est resté, pendant nos expériences, à la température de la salle d'opération, 30 minutes hors de l'organisme, il fut defibriné, puis chauffé à la température du corps et réinjecté, après 30 minutes, dans l'organisme.

La saignée à blanc durait jusqu'à l'écoulement du sang de lart cavotis par gouttes et jusqu'à l'arrêt complet de la respiration autonome, qui était remplacée par la respiration artificielle.

La réalisation du lavage du sang d'un organisme vivant fait naître toute une série de questions, tant d'un ordre théorique, que pratique du domaine de la physiologie du sang, de la pharmacologie et de la thérapeutique, ainsi par exemple celle des maladies, dont le principe est l'état anormal du sang de l'organisme malade. En même temps, une autre série de questions, d'une importance capitale, se présente comme sujet de recherches consécutives:

I. Comment les fonctions de différents organes s'accomplissent-elles durant et après le lavage de l'organisme vivant?

II. Comment s'opére le processus de la régéneration des éléments figurés du sang, sa durée, la successsion des étapes et le degré de son intensité?

III. Comment se font les variations de l'échange des matières en général et de l'échange gazeux en particulier, ainsi que les variations de la secrétion interne de différents organes durant le lavage de l'organisme vivant et la part, que prennent les organes différents dans le processus du renouvellement des correlations normales de l'organisme après le lavage?

IV. Le degré de l'influence des réagents biologiques, chimiques et physiques sur le sang soustrait de l'organisme et devant être reinjecté dans l'organisme de l'animal.

V. L'influence exercée sur le sang par différents antiserums et l'application des matières adsorbantes, tant pour l'élimination des microorganismes pathognomoniques, que comme mesure curative, ne derant pas changer, néanmoins, les propriétés fondamentales physiologiques et la morphologie du sang.

VI. L'étude de la possibilité de l'application du lavage de l'organisme vivant et du sang, relativement à la thérapeutique des maladies différentes et, en premier lieu, des maladies générales du sang, ainsi que des empoisonnements différents, accidentels de l'organisme.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала

Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.